INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · A. HERTWIG · K. KLOTTER
K. v. SANDEN · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XIX. BAND ZWEITES HEFT 1951

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Ing.-Archiv

Preis DM 15.80

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden von etwa 25 Bogen vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel**, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr. **A. Betz**, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A
Geh. Reg.-Rat Professor Dr.-Ing. **A. Hertwig**, Berlin-Wilmersdorf, Sächsische Str. 43
Professor Dr.-Ing. **K. Klotter**, Karlsruhe i. Baden, Technische Hochschule
Professor **K. v. Sanden**, Karlsruhe-Land I, Rosmarinstraße 11
Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt**, Braunschweig, Harzburger Straße 8a
Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen**, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klar verständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 24
Fernsprecher 24 40 u. 54 30

Berlin-Charlottenburg 2
Jebensstraße 1
Fernsprecher 32 20 70 u. 32 44 46

Vertriebsvertretung im Ausland:

Lange, Maxwell & Springer Ltd., 41–45 Neal Street, London, W. C. 2

Inhalt:

Seite

Hausenblas, H., Versuche an Turbinenlaufschaufelgittern. Mit 13 Textabbildungen 75

Jacobs, W., Systematische Druckverteilungsmessungen an Pfeilflügeln konstanter Tiefe bei symmetrischer und unsymmetrischer Anströmung (II. Mitteilung). Mit 18 Textabbildungen 83

Münz, H., Ein Integrationsverfahren für die Berechnung der Biegespannungen achsensymmetrischer Schalen unter achsensymmetrischer Belastung (I. Mitteilung). Mit 9 Textabbildungen 103

Schade, Th., Neuartige Behandlung der Poissonschen und der inhomogenen Bipotentialgleichung bei rechteckigen Bereichen mit Anwendung auf Probleme der Torsion und der Plattenbiegung. Mit 11 Textabbildungen 118

Szabó, J., Die achsensymmetrisch belastete dicke Kreisplatte auf elastischer Unterlage. Mit 3 Textabbildungen 128

Richter, W., Lösung einer Aufgabe über Strömung in Leitungssystemen. Mit 18 Textabbildungen 143

Kucharski, W., Berichtigung 154

INGENIEUR-ARCHIV

XIX. BAND ZWEITES HEFT 1951

Versuche an Turbinenlaufschaufelgittern.

Von H. Hausenblas.

1. Einleitung. Überblickt man die bisher in allgemein zugänglicher Weise veröffentlichten Meßergebnisse über das Verhalten von Profilgittern[1–8], so stellt man mit Ausnahme der neuesten englischen Literatur ein fast vollständiges Fehlen moderner Unterlagen für stark umlenkende Beschleunigungsgitter fest, wie sie im Dampf- und Gasturbinenbau Verwendung finden. Soweit es sich um Waagenmessungen handelt, ist außerdem einzuwenden, daß diese immer einen Integralwert der Verluste über der gesamten Schaufelhöhe einschließlich der höheren Randverluste[9, 10] angeben, und eine Abtrennung der letzteren nicht möglich ist. Die Druckverteilungsmessungen in den Schaufelkanälen hingegen liefern keine Angaben über die aufgetretenen Verluste. Dasselbe gilt von den Interferometermessungen *E. Eckerts*. Die Impulsschnittmethode hingegen gestattet die Vermessung der reinen Gitterverluste unter Ausschaltung der Randverluste, da man nur in einem einzigen mittleren Schnitt entsprechend langer Schaufeln mißt.

Im folgenden soll eine Reihe von Versuchsergebnissen für stark umlenkende Beschleunigungsgitter nach der Impulsschnittmethode mitgeteilt werden, die aus den Jahren 1942 bis 1944 stammen[11]. Obwohl es sich dabei nicht um Versuchsergebnisse aus systematischen Untersuchungsreihen handelt, dürften diese doch von einigem Interesse sein.

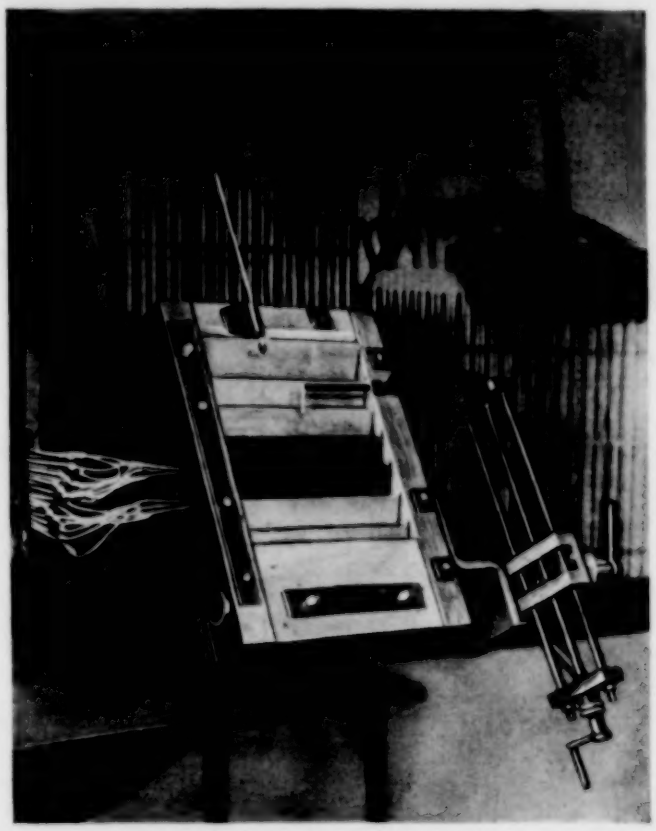


Abb. 1. Profilgitter-Versuchsstand

2. Die Versuchseinrichtung. Abb. 1 zeigt den Prüfstand und zwar einen Blick auf die Abströmseite des Gitters mit der Durchkurbeleinrichtung, die das Verfahren eines *Prandtl*rohres bzw. einer (in der Abb. nicht gezeigten) Zweifingersonde parallel zum Gitter gestattet. Damit konnte die Verteilung der Abströmgeschwindigkeit hinter dem Gitter nach Größe und Richtung aufgenommen werden. Es wurde im Überdruckbetrieb gearbeitet, da bei Saugbetrieb und der üblichen Art der Versuchseinrichtung u. U. eine Führung des aus dem Gitter austretenden Strahles hätte auftreten können, was durch Überbestimmung der Umlenkung im Gitter zu einer Ver-

[1] *A. Stodola*, Dampf- und Gasturbinen. Berlin 1924.

[2] *E. Knörnschild*, Untersuchungen an Turbinenschaufelgittern mit Hilfe einer Schaufelwaage. Jb. 1941 dtsch. Luftf.-Forschg., S. II 195/210.

[3] E. Knörnschild und K. Leist. Untersuchungen an Turbinenschaufelgittern, Jb. 1939 dtsch. Luftf.-Forschung., S. II 204/212.

[4] *W. Traupel*, Neue allgemeine Theorie der mehrstufigen axialen Turbomaschinen. Zürich 1942.

[5] *K. Christiani*, Experimentelle Untersuchung eines Tragflügelprofils bei Gitteranordnung. Luftf.-Forschg. 2 (1928), Heft 4.

[6] *A. R. Howell*, J. Roy. Aeronaut. Soc. 52 (1948), S. 329.

[7] *K. W. Todd*, Proc. Instn. Mechan. Engr. 157 (1947), S. 482.

[8] *D. G. Ainley*, Proc. Instn. Mechan. Engr. 159 (1948), S. 230.

[9] *M. Sédille*, Bull. techn. de l'Assoc. des Ingénieurs sorties de l'Université de Bruxelles, Nr. 3 (1948), S. 71.

[10] *A. D. S. Carter*, Proc. Instn. Mechan. Engr. 159 (1948), S. 255.

[11] An der Durchführung und Auswertung der Versuche waren die Herren *G. Rieger*, *S. Mielke*, *M. Lamblin* und *A. Pfleghaar* beteiligt.

fälschung der Gitterversuche geführt hätte. Ein Einfluß des Abstandes der Meßebene hinter dem Gitter auf die Meßergebnisse konnte für nicht zu kleine Abstände nicht festgestellt werden. Die in Abb. 1 eingebaut gezeigten mittelsten Schaufeln des aus Holz gefertigten Gitters sind in Messing hergestellte Sonderschaufeln, die im Mittelschnitt über den Umfang verteilte Druckmeßstellen besitzen. Die verschiedenen Zuströmrichtungen wurden durch Auswechseln der Zuströmkästen erzeugt. Die untersuchten Gitterformen sind aus Abb. 2 und deren Hauptdaten aus Ta-

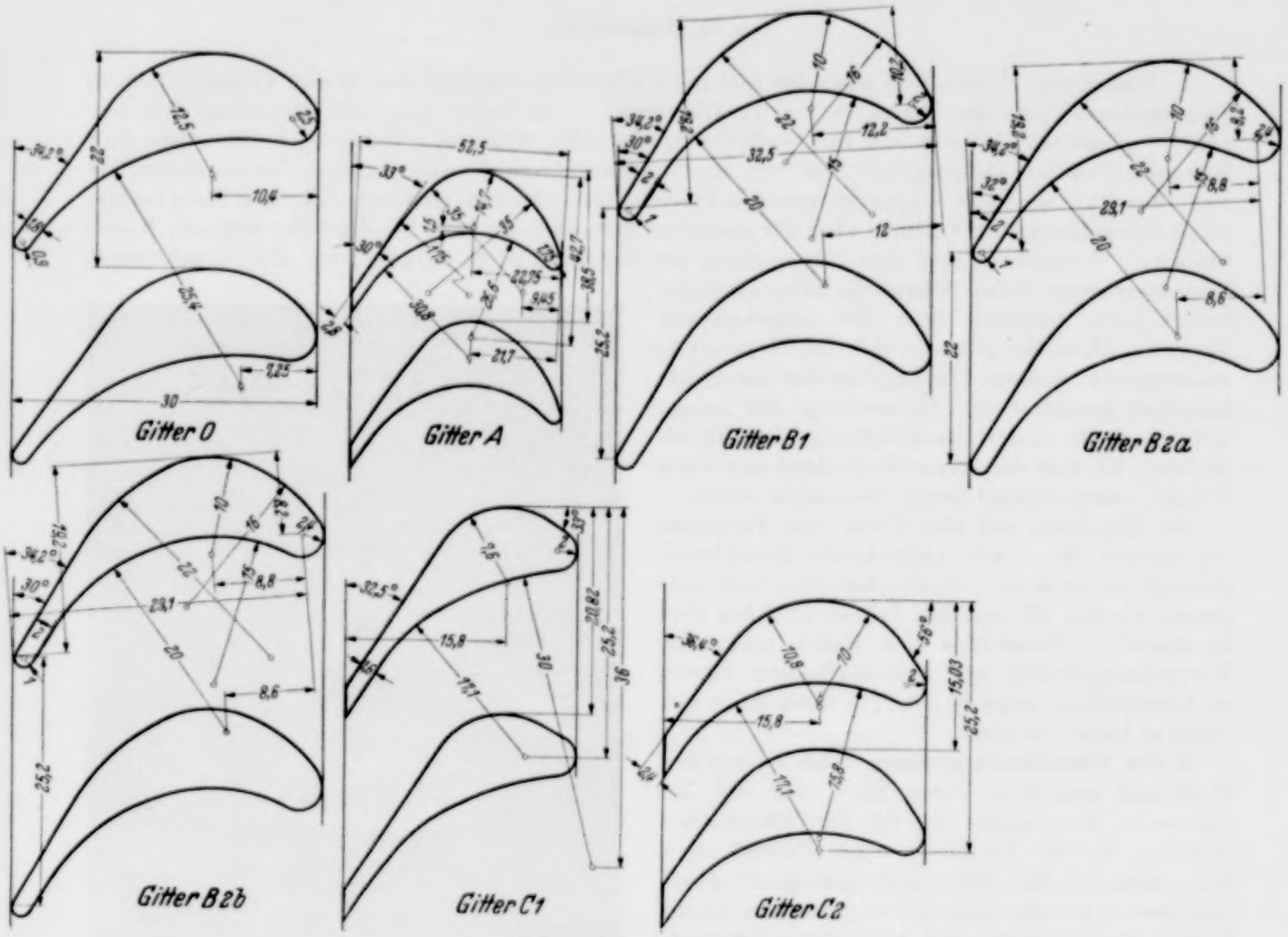


Abb. 2. Untersuchte Profilgitter.

Tabelle 1. *Hauptdaten der untersuchten Gitter.*

Profilgitter	Konstr. Eintrittswinkel	Konstr. Austrittswinkel	Staffelungswinkel	Teilungsverhältnis	Relative Pfeilhöhe	Relative Krümmungsrücklage	Relative Dicke	Relative Dickenrücklage	Relativer Eintrittskantenradius	Strichart
—	β_1'	β_2'	γ	t/l	f/l	x_f/l	d/l	x_d/l	ϱ/l	—
0	54,5°	34,2°	67,5°	0,705	0,249	0,39	0,282	0,32	0,080	———
A	30,5°	33,0°	80,2°	0,733	0,395	0,40	0,233	0,35	0,033	— · — · —
B 1	39,0°	30,0°	71,5°	0,790	0,336	0,42	0,248	0,26	0,063	— · · —
B 2a	48,5°	32,0°	70,5°	0,692	0,305	0,38	0,252	0,23	0,076	— · · · —
B 2b	50,5°	30,0°	68,5°	0,800	0,305	0,38	0,252	0,23	0,076	· · · · ·
C 1	73,0°	32,5°	57,0°	0,770	0,208	0,30	0,274	0,26	0,074	— — —
C 2	42,5°	36,4°	76,5°	0,572	0,306	0,41	0,313	0,35	0,076	— — — —

belle 1 zu entnehmen, wo auch die für die einzelnen Gitter in den späteren Abbildungen angewendeten Stricharten angegeben sind. Die benutzten Bezeichnungen sind aus Abb. 3 zu ersehen. Die *Reynolds*- und *Mach*zahl, bezogen auf die Zuströmgeschwindigkeit zum Gitter und die Sehnenlänge der Schaufeln, waren bei den Versuchen im Mittel $Re = 200000$ und $M = 0{,}128$.

Die Wahl der *Reynolds*zahl der Versuche in der Nähe des kritischen Bereiches derselben war durch die Verhältnisse in der betreffenden Turbine bedingt.

3. Die Versuchsergebnisse. Die in den Gitterversuchen erhaltenen Auftriebsbeiwerte c_a und Gleitzahlen ε sind in Abb. 4 wie bei *Howell*[1] in Abhängigkeit vom Winkel i zwischen Zuströmrichtung und Eintrittstangentenrichtung der Profilskelette zusammengestellt. Dabei wurde nicht c_a selbst, sondern $c_a \cdot l/t$ aufgetragen, da diese Wertekombination mit dem Umlenkungsdreieck des Gitters in direktem Zusammenhang steht. Ferner wurden an Stelle der Widerstandsbeiwerte die Gleitzahlen verwendet, da letztere in den Wirkungsgradformeln auftreten[2, 3]. An Hand des Verlaufs der Gleitzahlen in Abb. 4 kann man deutlich folgende auch an den Profilumrissen in Abb. 2 unterscheidbaren Profilfamilien feststellen:

4. Die Profilfamilien. Die Profile der ersten Familie (Profilgitter 0, C 1, C 2) sind nach der im älteren Dampfturbinenbau eingebürgerten Methode aus möglichst wenigen Kreisbögen zusammengesetzt und zeigen dementsprechend — wie noch später besprochen — nicht nur in der Nähe der Eintrittskante, sondern auch infolge des Krümmungssprunges auf ihrem Rücken[4] starke Übergeschwindigkeitsstellen. Sie zeigen daher ihre besten Gleitzahlen bei Zuströmwinkeln β_1, die den Skelettlinien-Eintrittswinkel β_1' wesentlich überschreiten (also bei negativem i), wo laut Abb. 5 (in der das Verhältnis der Abströmgeschwindigkeit w_2 zur Zuströmgeschwindigkeit w_1 dargestellt ist) die Strömung im Gitter insgesamt derart beschleunigt wird, daß die Übergeschwindigkeitsstellen relativ dazu genügend verschwinden. Die Gitter dieser Familie sind also trotz der relativ starken Krümmung ihrer Profile nur bei kleinen Umlenkungen günstig verwendbar. Das Profilgitter C 2 zeigt infolge seiner relativ zur Teilung zu großen Profildicke und damit schlechten Kanalform höhere Gleitzahlen als die übrigen.

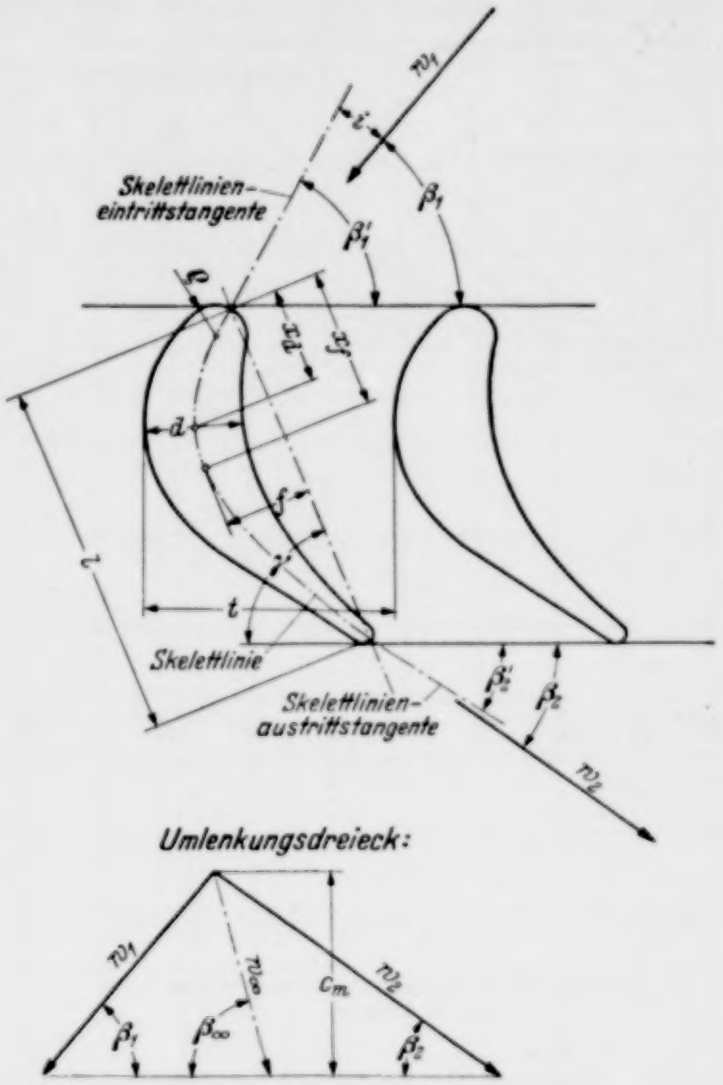


Abb. 3. Bezeichnungen im Profilgitter.

Die zweite Familie, der die Profilgitter B 1, B 2 a und B 2 b angehören, zeigen verfeinerte Profilformen, aber ähnlich dicke Eintrittskanten wie Familie eins. Die Folge dieser Verfeinerung ist eine Verminderung des Bestwertes der Gleitzahl und eine Verstärkung der Empfindlichkeit der Profile gegenüber Änderungen der Zuströmrichtung. Dabei sind die beiden mit relativ weiter Teilung versehenen Gitter B 1 und B 2b dem enger geteilten Gitter B 2 a in beiden Hinsichten deutlich überlegen. Die von *Friedrich*[5] in demselben Bereich der relativen Teilungen festgestellte umgekehrte Tendenz des Einflusses einer Teilungsänderung ist offensichtlich auf die mit scharfen Kanten behaftete Umrißform seiner Profile zurückzuführen. Diese Kanten können nur bei durch enge Teilung bedingter straffer Strömungsführung ohne stärkere Ablösung umströmt werden. Die mit steigender Teilung eintretende Verbesserung der Profilgitter wurde in dem hier betrachteten Bereich der relativen Teilungen auch von *Talbert* und *Smith*[6] erhalten.

[1] Siehe Fußnote 6 von S. 75.
[2] *C. Keller*, Axialgebläse vom Standpunkt der Tragflügeltheorie. Zürich 1934.
[3] *W. Traupel*, a. a. O.
[4] *A. Betz*, Luftf.-Forschg. 19 (1942), S. 129.
[5] *H. Friedrich*, Strömungsmechanik einer Dampfturbinenstufe bei wechselnden Betriebszuständen. Nürnberg 1948.
[6] *J. E. Talbert* und *J. C. Smith*, J. Aeron. Sciences 15 (1948), S. 556.

Die dritte Familie wird nur durch Gitter A vertreten. Die Profile desselben enthalten ähnliche Verfeinerungen der Umrißform wie jene der zweiten Familie, unterscheiden sich aber von

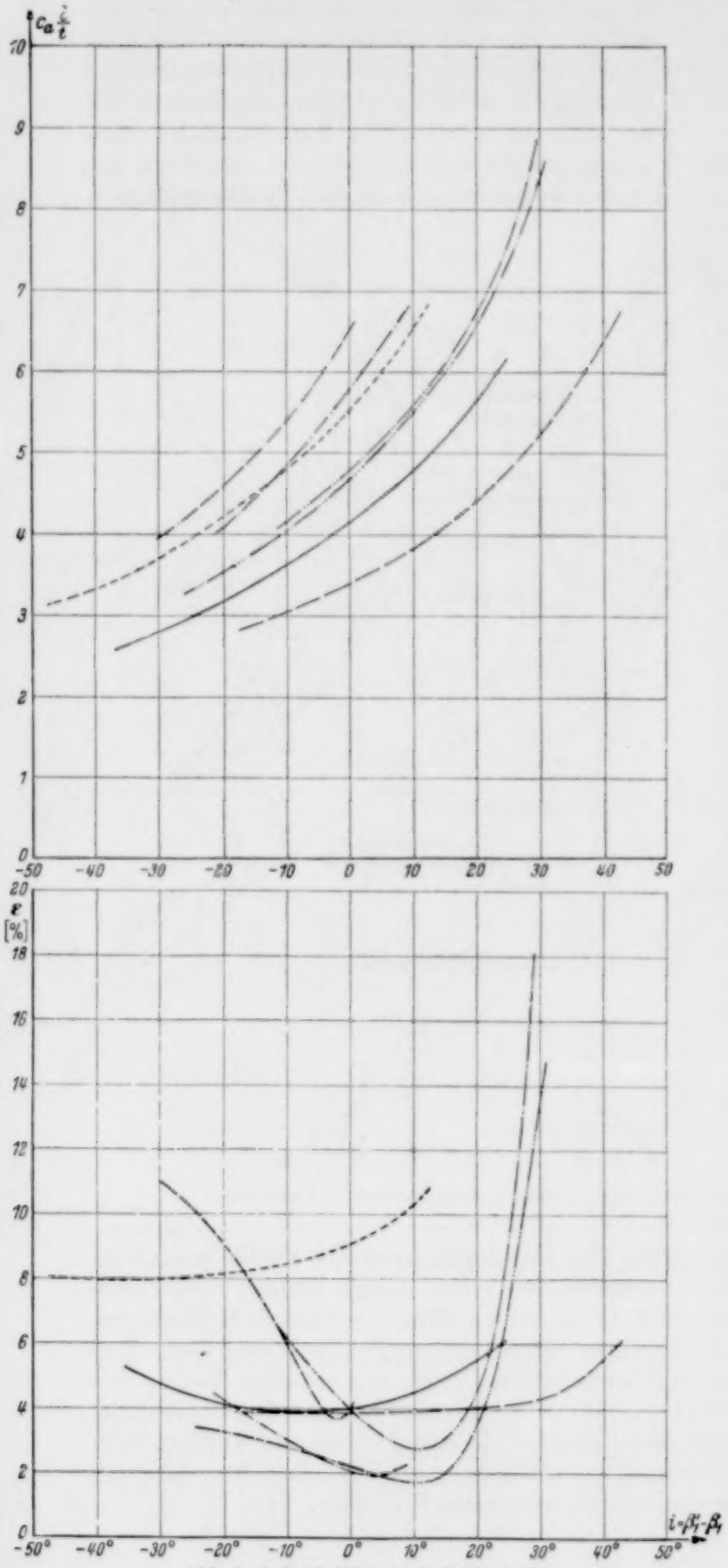


Abb. 4. Auftriebsbeiwerte und Gleitzahlen.

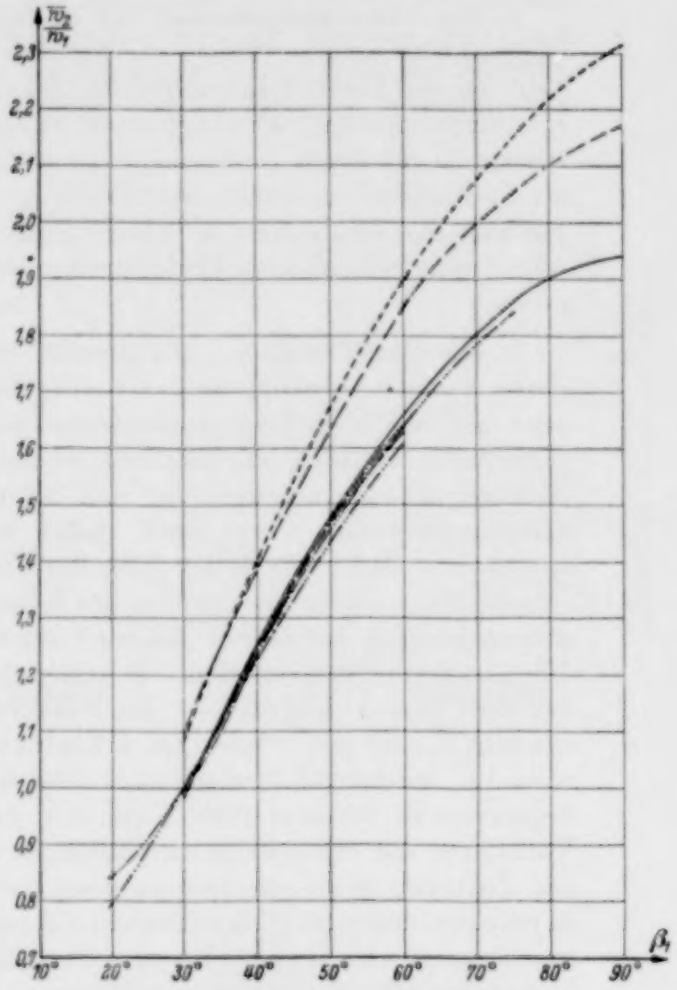


Abb. 5. Gitteraustrittsgeschwindigkeiten.

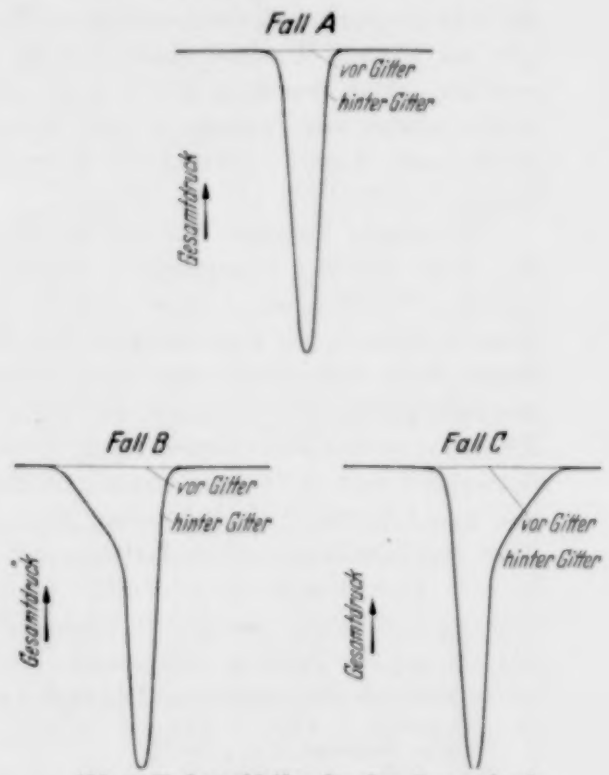


Abb. 6. Verlustschleifen für den Gesamtdruck.

letzteren durch eine relativ schlanke und scharf vorgezogene Eintrittskante. Man erkennt aus Abb. 4, daß diese scharfe Eintrittskante durchaus nicht so vorteilhaft ist, wie man zunächst glauben könnte, indem die minimale Gleitzahl höher liegt als bei allen Gittern der zweiten Fa-

milie. Da außerdem die Empfindlichkeit gegen Zuströmwinkeländerungen wesentlich größer ist als bei der zweiten Familie, wurde diese Profilfamilie nicht weiter untersucht.

Bemerkenswert sind noch die gegenüber Familie eins hohen Umlenkungen bzw. Auftriebsbeiwerte, die die Gitter der zweiten Familie bei besseren Gleitzahlen erreichen, was bedeutet, daß man mit Familie zwei wesentlich größere Stufengefälle mit guten Wirkungsgraden verarbeiten kann.

5. Die Gesamtdruckverteilung. Interessant war ferner der Verlauf der hinter dem Gitter vermessenen Gesamtdruckverteilungen, von denen drei charakteristische in Abb. 6 skizziert sind. Verteilung *A* entspricht dem Normalfall ohne stärkere Ablösungen, während *B* und *C* Verteilungen mit stärkeren Ablösungen an Schaufelbrust bzw. Schaufelrücken bei stark von der stoßfreien Eintrittsrichtung abweichenden Zuströmungen sind.

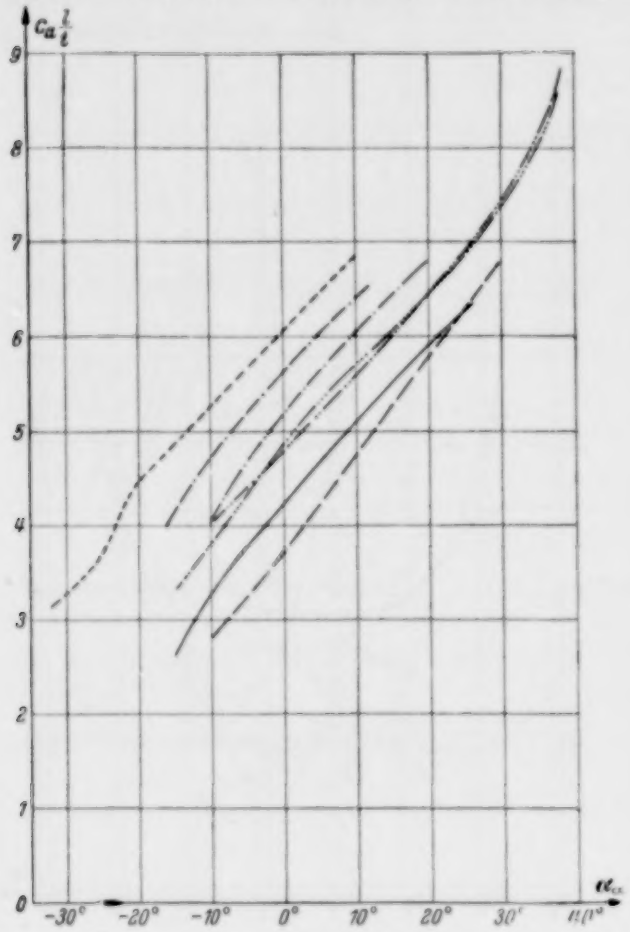


Abb. 7. Auftriebsbeiwerte.

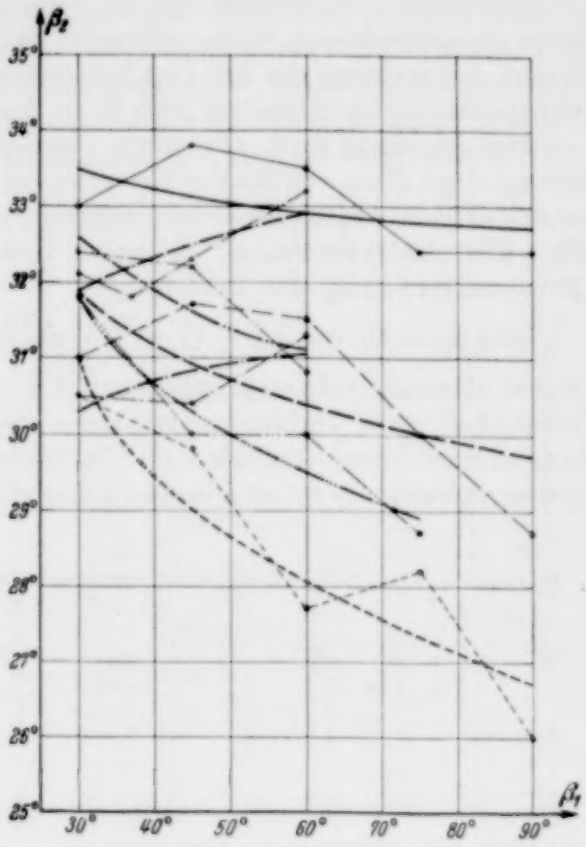


Abb. 8. Mittlere Austrittswinkel der Strömung aus dem Gitter.

6. Die Auftriebsbeiwerte. Um nun den Verlauf der erhaltenen Auftriebsbeiwerte näher analysieren zu können, sind diese in Abb. 7 in der in der Gittertheorie gewohnten Weise in Abhängigkeit vom mittleren Anstellwinkel $\alpha_\infty = \beta_\infty - \gamma$ aufgetragen und mit Hilfe der bekannten Beziehung [1–4]

$$c_a = a_0 K_0 \sin(\alpha_\infty + \alpha_0)$$

nach $a_0 K_0$ und α_0 mit der Methode der kleinsten Quadrate ausgewertet (vgl. Tabelle 2), wobei die später einer Betrachtung unterzogenen stark abweichenden Punkte bei $\alpha_\infty > 30°$ ($\beta_1 < 30°$) nicht berücksichtigt wurden. Dabei ist a_0 eine den Anstieg des Auftriebsbeiwertes angebende

Tabelle 2. *Umlenkverhalten der untersuchten Gitter.*

Profilgitter	Aus den Auftriebsbeiwerten gerechnet			Aus den Austrittswinkeln gerechnet	
	$a_0 K_0$	α_0	$\beta_{2\infty}$	$\beta_{2\infty}$	c_H
O	5,01	36,9°	30,6°	32,0°	0,9725
A	5,73	46,4°	33,8°	35,1°	1,0606
B 1	6,31	39,7°	31,8°	32,4°	1,0399
B 2a	5,15	40,6°	29,9°	28,4°	0,9196
B 2b	5,93	41,1°	27,4°	25,2°	0,8679
C 1	5,85	30,4°	26,6°	27,6°	0,9159
C 2	4,18	57,0°	19,5°	22,3°	0,8149

[1] *F. Weinig*, Die Strömung um die Schaufeln von Turbomaschinen. Leipzig 1935.
[2] *G. Klingemann*, Ing.-Arch. 11 (1940), S. 151.
[3] *G. F. Wislicenus*, Trans. Amer. Soc. mechan. Engr. Aug. (1945), S. 451.
[4] *G. F. Wislicenus*, Fluid Mechanics in Turbomachinery. New York 1947.

Konstante, K_0 der Gittereinfluß-Korrekturbeiwert, α_0 der die Nullauftriebsrichtung des Profils im Gitterverband festlegende Winkel. Der Gitterkorrekturbeiwert K_0 ist vom Teilungsverhältnis $(t/l)_{st}$ und Staffelungswinkel γ_{st} des äquivalenten Streckenprofilgitters abhängig, welche Werte (insbesondere der Staffelungswinkel) von den entsprechenden Werten des wirklichen Gitters abweichen und am bequemsten durch konforme Abbildung mit Hilfe der elektrischen Analogie[1-4] erhalten werden können. Da bei den hier beschriebenen Versuchen $(t/l)_{st}$ und γ_{st} nicht ermittelt wurden, ist die Trennung der beiden Faktoren von $a_0 K_0$ nicht möglich. Würde die in den Versuchen erhaltene Nullauftriebsrichtung mit jener für Potentialströmung identisch sein, so wäre $\gamma_{st} = \gamma - \alpha_0$.

7. Die Austrittswinkel. Trotzdem durch die eben durchgeführte Betrachtung der Auftriebsbeiwerte das Umlenkverhalten der Gitter bereits charakterisiert ist, wollen wir in Abb. 8 nochmals die gemessenen Austrittswinkel der Gitter direkt betrachten, da bei kompressiblem Strömungsmittel das Arbeiten mit dem Auftriebsbeiwert schwierig wird. Dieselben Überlegungen, die zu dem oben erwähnten Gitterkorrekturbeiwert für den Auftriebsbeiwert führten, ergeben für den Abströmwinkel β_2 vom Gitter bei Potentialströmung die Beziehung

$$\operatorname{ctg} \beta_2 = C_H \operatorname{ctg} \beta_{20} - (1 - C_H) \operatorname{ctg} \beta_1 ,$$

wobei der Gitterkorrekturbeiwert C_H in Abhängigkeit vom Teilungsverhältnis und Staffelungswinkel des äquivalenten Streckenprofilgitters bekannt ist[4,5] und immer unter eins liegt.

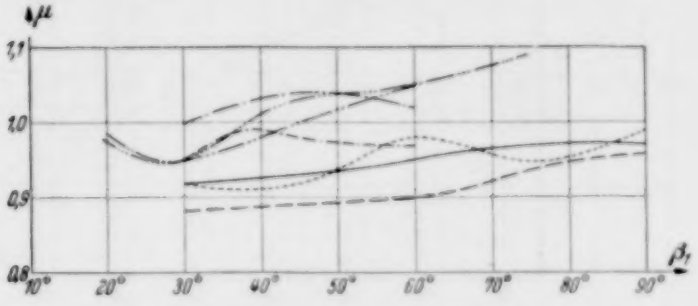


Abb. 9. Kontraktionsziffer der Strömung im Gitter.

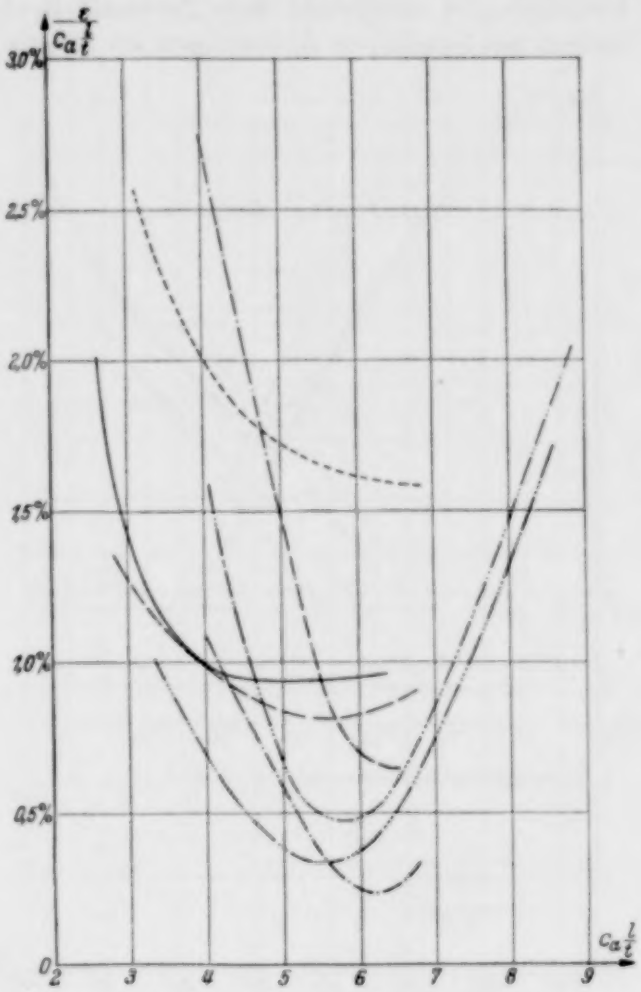


Abb. 10. Interpolation der Gleitzahlen.

In Abb. 8 sind nun neben den wegen der Streuung durch geknickte Kurvenzüge verbundenen Meßpunkten, die mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate erhaltenen Ausgleichskurven eingetragen und in Tabelle 2 die entsprechenden Werte von C_H und des Abströmwinkels β_{20} bei ablenkungsfreier Durchströmung des Gitters zusammengestellt. Bei dieser Auswertung wurden die stark abweichenden Meßpunkte für $\beta_1 < 30°$ aus später besprochenen Gründen herausgelassen. Außerdem ist zu beachten, daß die Gitter trotz ihrer großen Schaufellängen nicht in ebener Strömung arbeiteten (vgl. Kontraktionsziffer $\mu = c_{m1}/c_{m2}$ in Abb. 9), was selbstverständlich die Strömungsaustrittswinkel der Gitter und die Größe der Werte C_H ebenfalls beeinflußt. Dabei war interessant festzustellen, daß die Kontraktionsziffern nicht längs der Schaufellänge konstant oder von Schaufelmitte nach den Schaufelenden zu einsinnig verlaufend waren. Die Gitter A und B1 haben ein dem theoretischen zuwiderlaufendes Verhalten und damit Werte $C_H > 1$, doch werden auch die diesbezüglichen Meßwerte durch obige Formel gut interpoliert. Dieses abnormale Verhalten der Abströmwinkel und die starke Veränderung der Abströmwinkel für $\beta_1 < 30°$ ist darauf zurückzuführen, daß die Abströmwinkel eines Gitters außer vom potentialtheoretisch erfaß-

[1] *P. de Haller*, Application de l'analogie électrique à l'étude des grilles d'aubes. Rev. Techn. Sulzer (1947), Nr. 3/4, S. 11/17.
[2] *K. H. Großmann*, Schweiz. Bauztg. 66 (1938), S. 429.
[3] *L. Malavard, R. Siestrunck* und *P. Germain*, Rech. Aéronautique, (1948), S. 33.
[4] *W. Traupel*, Zur Potentialtheorie des Schaufelgitters, Techn. Rundschau Sulzer (1948), S. 12/30.
[5] Siehe Fußnoten 1, 3 u. 4 von S. 79.

baren Einfluß und den Abweichungen vom ebenen Strömungszustand noch von den im Gitter auftretenden Verlusten abhängen. Die bei wachsenden Verlusten sich verstärkenden Grenzschichten und Ablösungsgebiete ergeben entsprechend wie die endliche Dicke der Profilaustrittskanten eine Verminderung des Abströmwinkels. Daher tritt ein dém theoretischen ähnliches Verhalten der Abströmwinkel und eine Veränderung der Auftriebsbeiwerte mit dem Sinus des Anstellwinkels nur im Gebiet der besten Gleitzahlen auf, weshalb — wie schon erwähnt — bei den Auswertungen jene Versuchspunkte, bei denen die Gitter infolge Arbeitens als Verzögerungsgitter ($\beta_1 < 30°$, $\alpha_\infty > 30°$) hohe Verluste aufweisen, nicht berücksichtigt wurden. Es sei noch erwähnt, daß die durch hohe Verluste bedingten Verringerungen der Abströmwinkel die nach der Abschätzung von *Traupel*[1] berechneten Werte übersteigen. Der merkwürdige Verlauf der Auftriebsbeiwerte des Gitters *C* 2 im Bereich $\alpha_\infty \approx -20$ bis $-30°$ dürfte auf Meßungenauigkeit zurückzuführen sein.

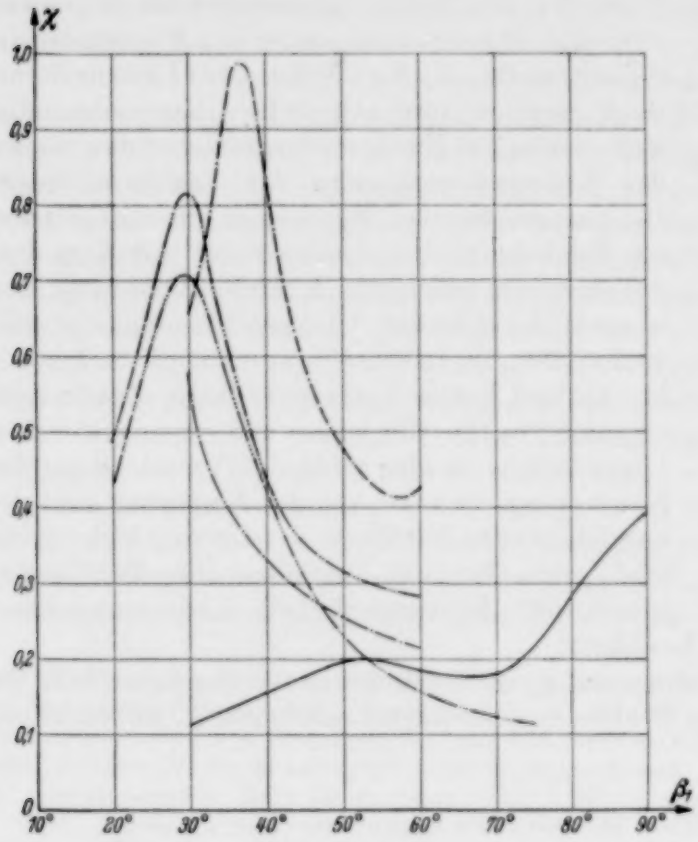


Abb. 11. Stoßfaktor.

8. Die Gleitzahlen. Bei der Analyse der Gleitzahlen ergab sich, daß es nach Abb. 10 offenbar möglich ist, diese durch Parabeln für den in der genannten Abbildung dargestellten Wert $\varepsilon/(c_a \cdot l/t)$ von einer je nach Profilart verschiedenen Ordnung n entsprechend

$$\frac{\varepsilon}{c_a \frac{l}{t}} = \left(\frac{\varepsilon}{c_a \frac{l}{t}}\right)_{opt} + C \left[\left[c_a \frac{l}{t} - \left(c_a \frac{l}{t}\right)_{opt}\right]^n\right]$$

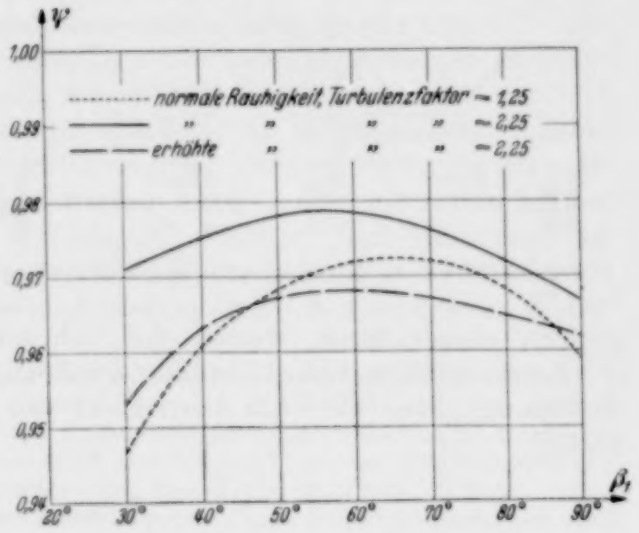


Abb. 12. Einfluß der Rauhigkeit der Profile und des Turbulenzfaktors der Luft.

anzunähern, wobei C und n Konstanten sind und der Index „opt" die Werte für den Punkt mit dem niedrigsten $\varepsilon/(c_a \cdot l/t)$ kennzeichnet.

9. Die Geschwindigkeitsbeiwerte. Ausgehend von den im Dampfturbinenbau üblichen Gedankengängen kann man aber auch den Verlauf der Kurve der Geschwindigkeitsbeiwerte über dem Zuströmwinkel β_1 als Superposition eines Grundverlustes ψ_{opt} (bei β_{1opt}) und eines Eintrittsstoßverlustes zusammengesetzt denken, was für inkompressibles Medium auf die Beziehung:

$$\frac{\psi}{\psi_{opt}} = [1 + \chi (\operatorname{ctg} \beta_{1opt} - \operatorname{ctg} \beta_1)^2 \sin^2 \beta_2]^{-1/2}$$

führt, wobei der Stoßfaktor χ ein Abminderungsfaktor gegenüber dem *Carnot*schen Stoßverlust ist. Die Auswertung einiger Gitter (Abb. 11) zeigte, daß dieser Stoßfaktor so stark variiert, daß er nicht als Konstante angenähert werden kann. Das Maximum von χ liegt bei den Familien zwei und drei in der Nähe des Zuströmwinkels für Gleichdruckbetrieb, was sich auch bei Auswertung fremder Gittermessungen[2] mit wesentlich größerem β_1' wiederholte.

10. Einfluß der Turbulenz. Da die vorstehend beschriebenen Gitterversuche knapp oberhalb jener *Reynolds*zahlen ausgeführt wurden, die dem kritischen Bereich für Profile entsprechen,

[1] Siehe Fußnote 4 von S. 75.
[2] Siehe Fußnote 3 von S. 75.

wurde schließlich noch in einem Beispiel (Gitter 0) der Einfluß einer erhöhten Turbulenz der Arbeitsluft und einer erhöhten Oberflächenrauhigkeit der Profile festgestellt. Die dabei erhaltenen Geschwindigkeitsbeiwerte ψ des Gitters sind in Abb. 12 zusammengestellt. Beide Einflüsse ergaben merkliche Änderungen im erwarteten Sinne.

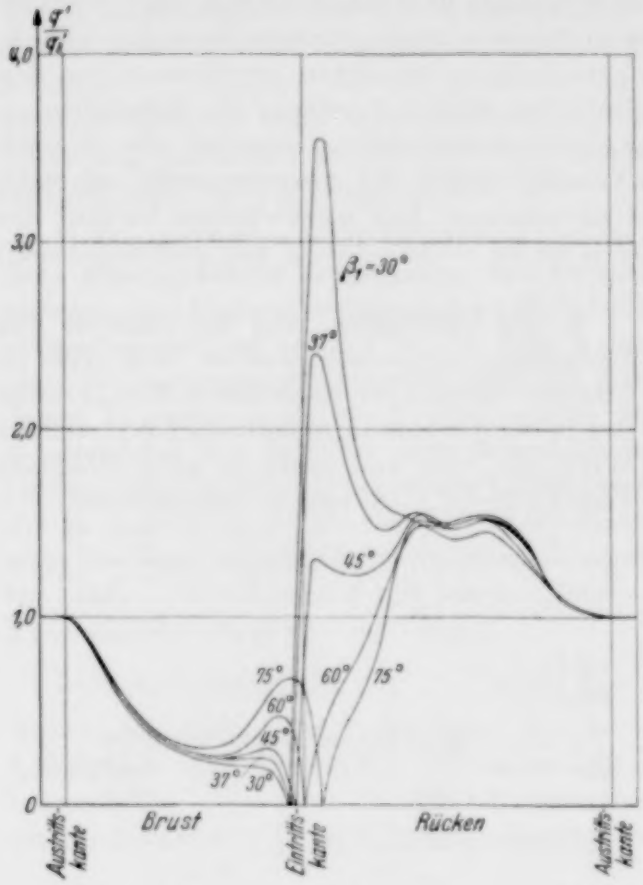


Abb. 13. Verteilung des Druckes um den Profilumfang.

11. Die Druckverteilung. Als letztes ist in Abb. 13 das Ergebnis von Druckverteilungsmessungen um den Profilumfang für Gitter B2a wiedergegeben. Aufgetragen ist der „ideale" Staudruck q' (= Differenz von Gesamtdruck vor Gitter und statischem Druck an der betreffenden Stelle) dividiert durch den entsprechenden Wert für den Strömungszustand am Gitteraustritt (q'_2). Man erkennt außer der Übergeschwindigkeitsstelle in der Nähe der Eintrittskante noch zwei weitere schwache Übergeschwindigkeitsstellen am Rücken entsprechend den Stellen der Krümmungssprünge der Profilumrißform. Bei entsprechenden Messungen am Gitter 0 war am Rücken in Übereinstimmung mit dem dort vorhandenen stärkeren Krümmungssprung eine wesentlich stärkere Übergeschwindigkeitsstelle vorhanden, die zu einer entsprechend starken Ablösung und hohen Verlusten führte. Zusammensetzung von Profilformen aus einzelnen Kreisbögen erscheint also trotz der Verwaschung der Krümmungssprünge bei der Fertigung und der ausgleichenden Einflüsse der Grenzschicht als zu grob, weshalb vom Verfasser eine Profilsystematik mit kontinuierlichen Krümmungsübergängen ausgearbeitet wurde, die sich gut bewährt.

Ferner wird in Abb. 13 infolge der Bezugnahme auf q'_2 verdeutlicht, in wie starkem Maße die Strömung in der Nähe der Austrittskanten der Profile von der Zuströmrichtung β_1 unbeeinflußt bleibt.

(Eingegangen am 28. Juli 1950.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *H. Hausenblas*, Saarbrücken 1, Françoisstr. 30.

Systematische Druckverteilungsmessungen an Pfeilflügeln konstanter Tiefe bei symmetrischer und unsymmetrischer Anströmung.

II. Mitteilung*.

Von W. Jacobs.

1. Einleitung. In der I. Mitteilung ist über umfangreiche systematische Sechskomponentenmessungen an Pfeilflügeln verschiedener Pfeilung und Zuspitzung berichtet worden. Für diese Systematik war die wichtige Klasse der Trapezflügel herausgegriffen worden. Bei festem Seitenverhältnis ($A = 5$) wurden die Pfeilung ($\varphi = -30°$, 0, $+15$, 30, 45°) und die Zuspitzung ($Z = 1{,}0$; 0,6; 0,2) variiert. Besonderer Wert wurde hierbei auf die Bestimmung der Stabilitätsbeiwerte gelegt. Die Ergebnisse stimmten z. T. recht gut mit theoretischen Werten überein. Um genauen Aufschluß über die Kräfteverteilung im einzelnen zu gewinnen, wurden im Anschluß daran Druckverteilungsmessungen durchgeführt, und zwar bei symmetrischer und unsymmetrischer Anströmung. Aus der bei den Sechskomponentenmessungen durchgemessenen umfangreichen Systematik wurden hierfür zunächst die Flügel mit konstanter Tiefe ($Z = 1$) herausgegriffen. Später sollten die Ergebnisse auch auf einige andere Flügel mit anderer Zuspitzung erweitert werden. Die Ergebnisse dieser Zusammenstellung sind bereits früher in einzelnen Teilberichten mitgeteilt worden[1,2,3]. Während über Druckverteilungsmessungen an Pfeilflügeln bei symmetrischer Anströmung heute bereits eine Anzahl von Ergebnissen vorliegt[4–7,8,9] ist das Material über unsymmetrische Anströmung äußerst spärlich. An systematischen Untersuchungen, die ja besonders wichtig sind, fehlt es noch vollkommen. Theoretisch ist die Berechnung der Auftriebsverteilung von Pfeilflügeln bei symmetrischer Anströmung mit ausreichender Genauigkeit möglich. Es sind hier die Methoden von *Weissinger*[10], *Falkner*[11] und *Mutterperl*[12] zu nennen. Für gerade Flügel mit nicht zu kleinem Seitenverhältnis ist die Methode von *Multhopp*[13] die heute am weitaus gebräuchlichste. In neuester Zeit sind umfangreiche Rechnungen nach den

---

* Die vorliegenden Messungen wurden zwischen 1942 und 1945 im früheren Aerodynamischen Institut der Technischen Hochschule Braunschweig ausgeführt. (Leitung: Prof. Dr. *H. Schlichting*.) Sie wurden während des Krieges in mehreren FB- und UM-Berichten der ZWB (Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen) mitgeteilt, die heute nicht mehr zugänglich sind. Hier wird abschließend (in zwei Mitteilungen) ein zusammenfassender Bericht gegeben. Die I. Mitteilung erschien im Ing.-Arch. 18 (1950), S. 344.

[1] *W. Jacobs*, Druckverteilungsmessungen an Pfeilflügeln konstanter Tiefe bei symmetrischer Anströmung. Untersuchungen u. Mitteilungen der D. V. L. Berlin-Adlershof, U. M. 2059 (1943). Bibliography of Technical Reports. Washington, P. B. 39148.

[2] *W. Jacobs*, Druckverteilungsmessungen an einem Pfeilflügel konstanter Tiefe ($\varphi = 15$) bei unsymmetrischer Anströmung. Untersuchungen u. Mitteilungen der D. V. L. Berlin-Adlershof, U. M. 2083. Bibliography of Technical Reports. Washington, P. B. 39139.

[3] *W. Jacobs*, Druckverteilungsmessungen an zwei Pfeilflügeln konstanter Tiefe ($\varphi = 30°$, 45°) bei unsymmetrischer Anströmung. Untersuchungen u. Mitteilungen der D. V. L. Berlin-Adlershof, U. M. 2110. Bibliography of Technical Reports. Washington, P. B. 39141.

[4] *H. Luetgebrune*, Druckverteilungsmessungen an Pfeilflügeln. Forsch.-Ber. der Zentrale für wissenschaftl. Berichtswesen, Berlin-Adlershof, F. B. 1501 (1941).

[5] *R. Göthert* und *H. Scholkemeier*, Sechskomponentenmessungen und Druckverteilungsmessungen an einem Rechteckflügel und einem Ellipsenflügel. Forsch.-Ber. der Zentrale für wissenschaftl. Berichtswesen, Berlin-Adlershof, F. B. 1451 (1941).

[6] *Th. Schwenk*, Messungen an einem trapezförmigen Pfeilflügel. Forsch.-Ber. der Zentrale für wissenschaftl. Berichtswesen, Berlin-Adlershof, F. B. 1781 (1943).

[7] *Thiel-Weissinger*, Druckverteiiungsmessungen an einem geraden und einem 35° rückgepfeilten Trapezflügel. Untersuchungen u. Mitteilungen der D. V. L. Berlin-Adlershof, U. M. 1293 (1944).

[8] *Nicholac*, *van Dorn*, Dr. *Young*, A comparison of three theoretical methods of calculating span load distribution on swept wings. N. A. C. A. Techn. Note No. 1476.

[9] *M. Ingelman-Sundberg*, Experimental determination of pressure distribution on a plane wing with 40° sweepback at low speed. Technische Hochschule. Stockholm, A. E. R. O. TN 8.

[10] *I. Weissinger*, Math. Nachr. 2 (1949), S. 45.

[11] *V. M. Falkner*, The calculation of aerodynamic loading on surfaces of any shaps. A. R. C. Rep. a. Memoranda 1910 (1943).

[12] *W. Mutterperl*, The calculation of span load distributions on swept back wings. N. A. C. A. Techn. Note 834 (1941).

[13] *H. Multhopp*, Luftf.-Forschg. 15 (1938), S. 153.

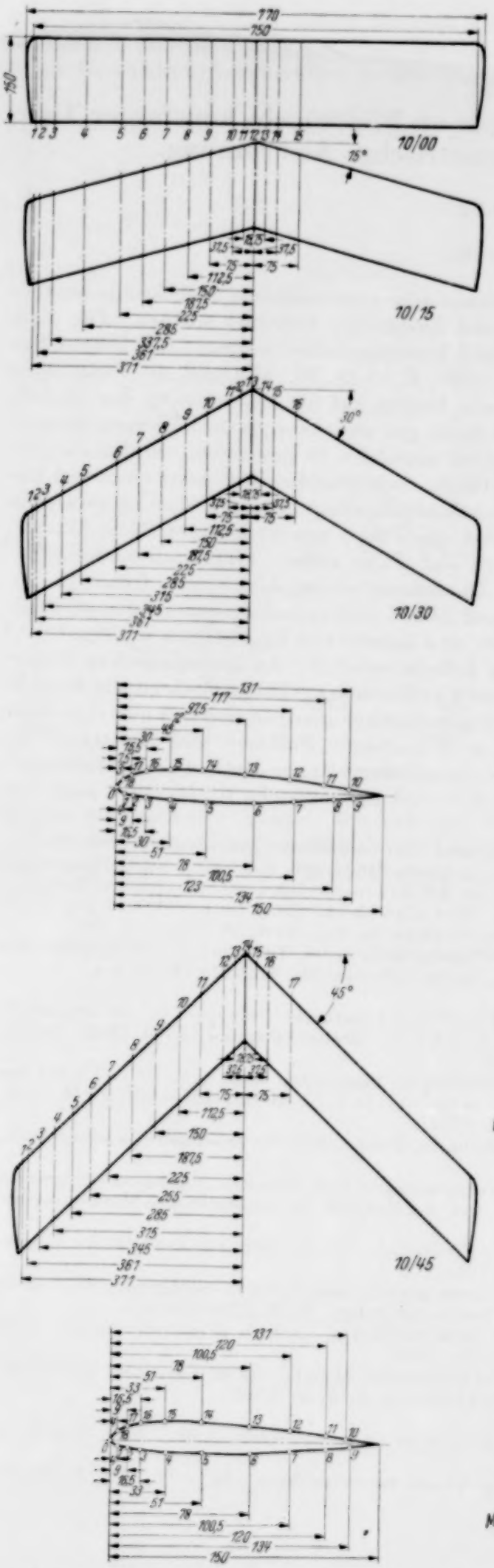


Abb. 1. Übersichtsskizze der Flügel und Lage der Meßquerschnitte und Meßanbohrungen, Profil NACA 23 012.

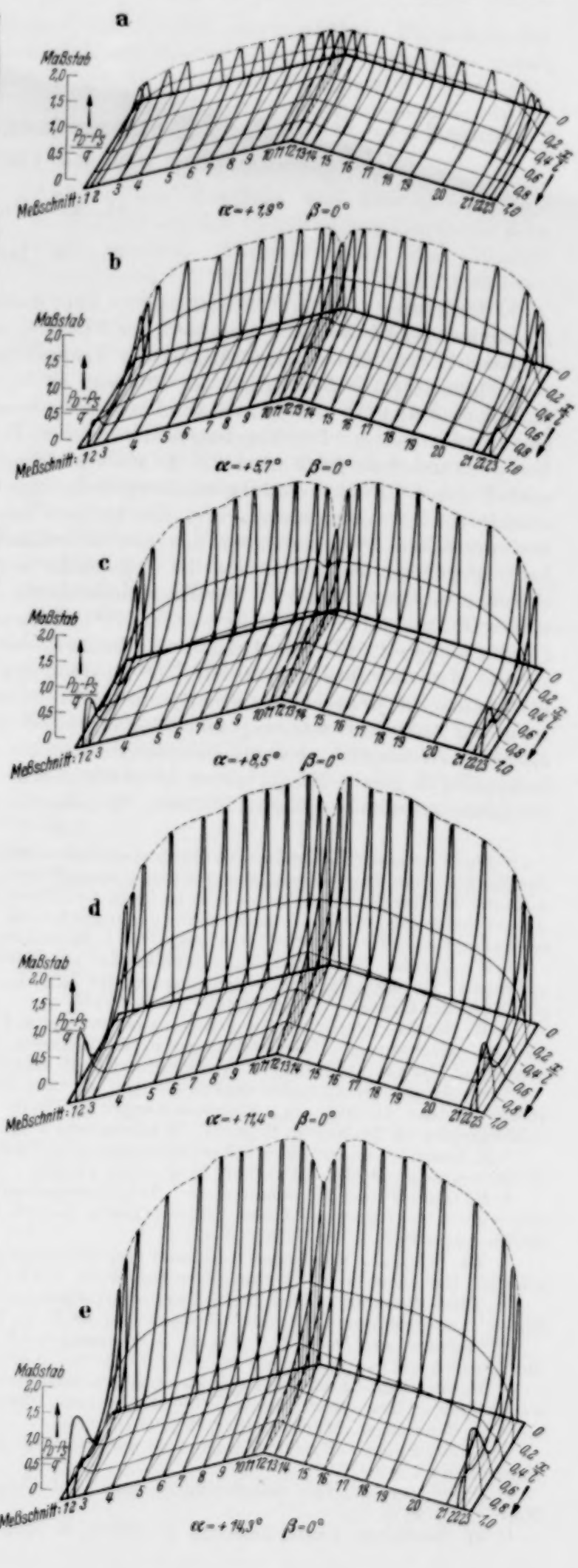
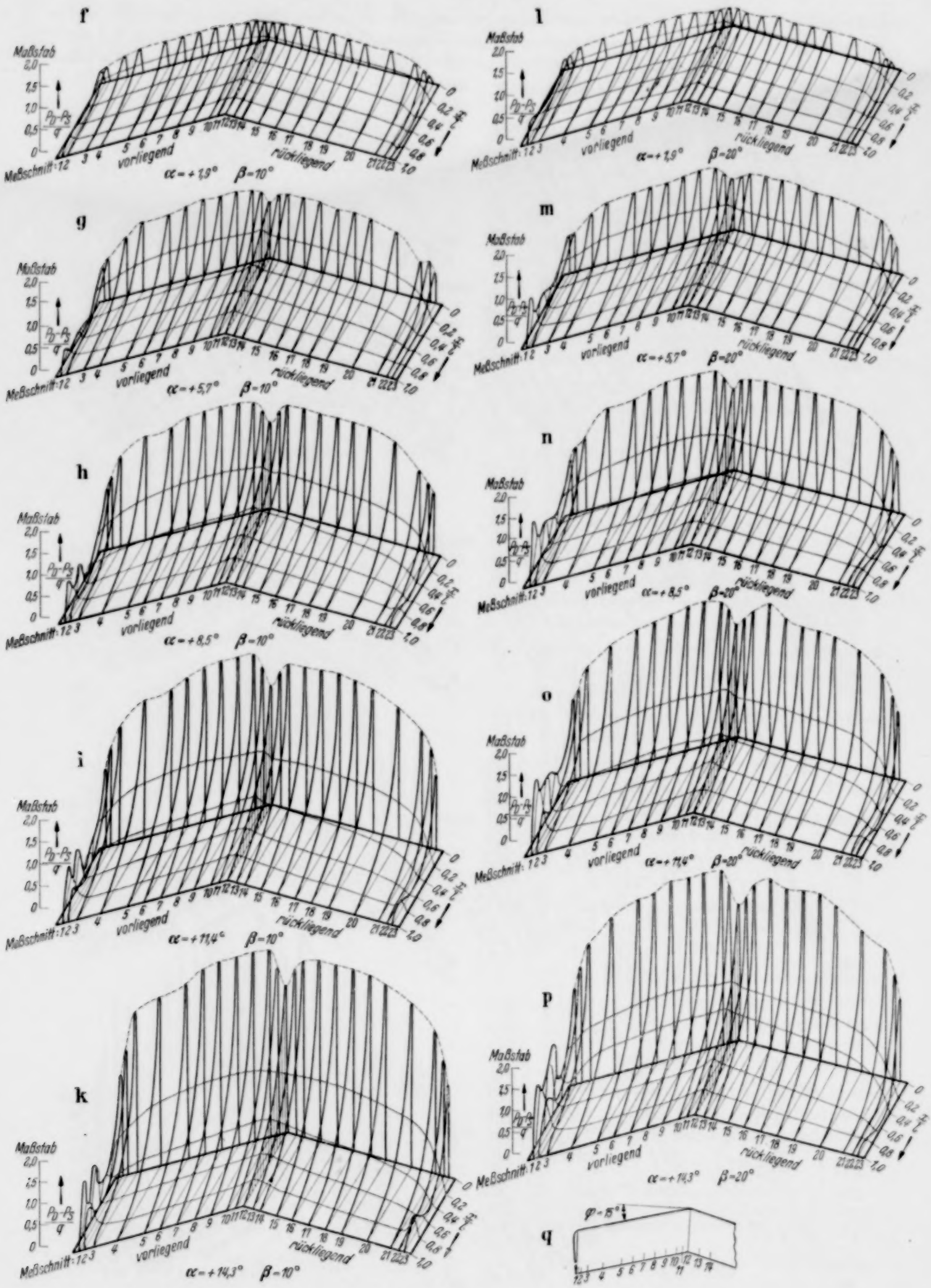


Abb. 2. Normalkraftverteilungen am Pfeilflügel 10/15. $\alpha = +\ 1{,}9;\ 5{,}7;\ 8{,}5;\ 11{,}4;\ 14{,}3°;\ \beta = 0,\ 10,\ 20°$.


f
Maßstab
Meßschnitt: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24
vorliegend
rückliegend
α = + 1,9° β = 10°
g
α = + 5,7° β = 10°
h
α = + 8,5° β = 10°
i
α = + 11,4° β = 10°
k
α = + 14,3° β = 10°
l
α = + 1,9° β = 20°
m
α = + 5,7° β = 20°
n
α = + 8,5° β = 20°
o
α = + 11,4° β = 20°
p
α = + 14,3° β = 20°
q
φ = 15°

Zu Abb. 2.

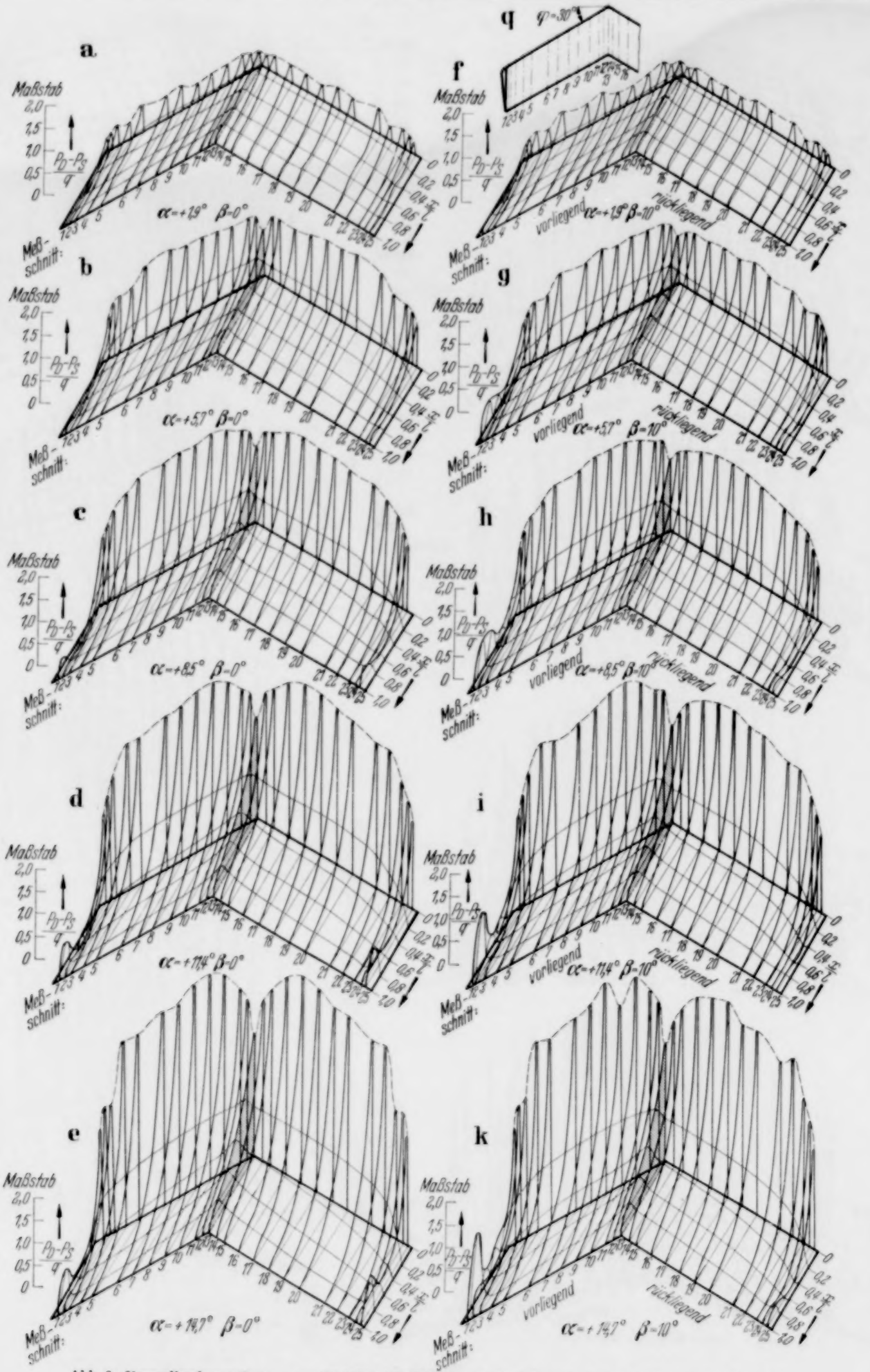
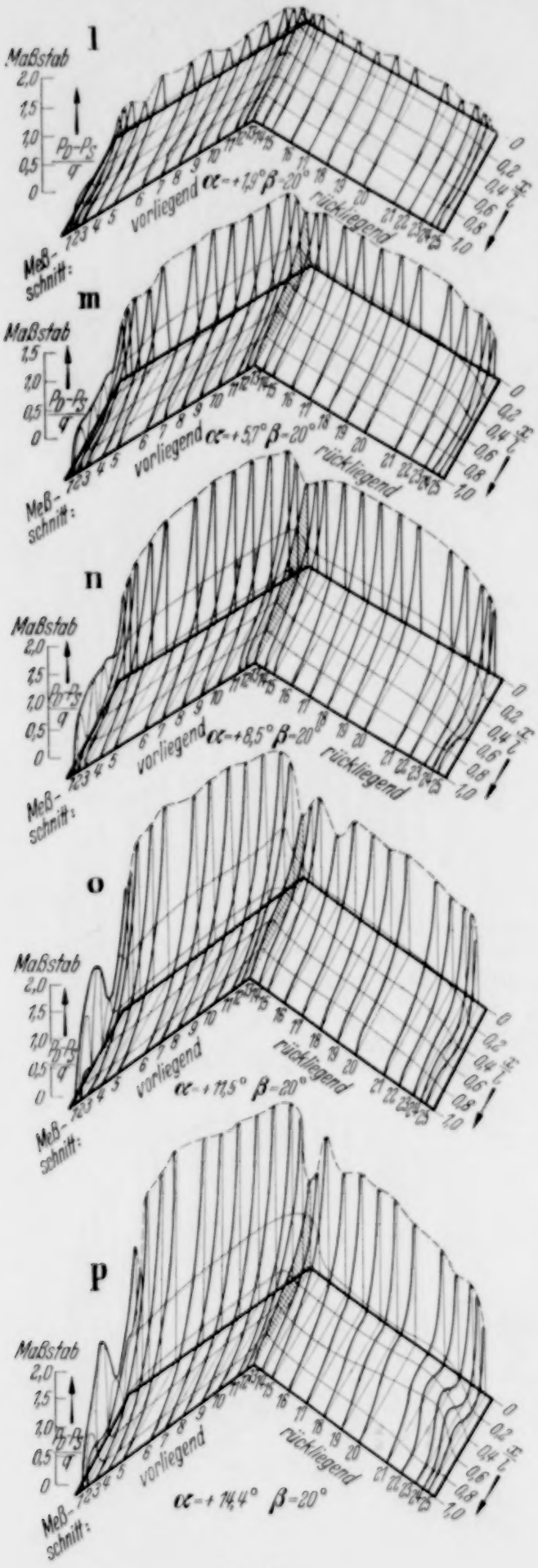


Abb. 3. Normalkraftverteilungen am Pfeilflügel 10/30. $\alpha = +1{,}9;\ 5{,}7;\ 8{,}5;\ 11{,}4;\ 14{,}3°;\ \beta = 0,\ 10,\ 20°$.

obigen Methoden durchgeführt und miteinander verglichen worden[1]. Hierbei wurden Pfeilwinkel, Zuspitzung und Seitenverhältnis in weiten Grenzen variiert. Als Ergebnis ist zu nennen, daß *Falkners* Methode die besten Resultate lieferte, allerdings mit großem Rechenaufwand. *Weissingers* Methode ergab praktisch gleiche Genauigkeit und ist daher infolge des geringeren Rechenaufwandes zu empfehlen. *Mutterperls* Methode stellt keine Verbesserung dar.

Bei unsymmetrischer Anströmung ist die Berechnung der Auftriebsverteilung bisher nur für gerade Flügel möglich[2]. Wir wollen im folgenden eine einfache Näherungslösung hierfür angeben, die jedoch recht brauchbare Ergebnisse liefert.



Zu Abb. 3.

2. Bezeichnungen und Bezugsgrößen. Es wurden die Bezeichnungen nach dem Normblatt Din L100 verwendet:

x, y Flugzeugfeste Koordinaten,

ξ, η Dimensionslose Koordinaten, $\xi = 2x/b$; $\eta = 2y/b$,

p Druck am Profil,

p_D = Druck auf Druckseite,

p_S = Druck auf Saugseite,

$c_{n\,\text{örtl}}$ Örtlicher Normalkraftbeiwert,

$$(\Delta c_{n\,\text{örtl}})_{pf} = \left(c_{n\,\text{örtl}} - c_{n\,\text{örtl}_{\beta=0}}\right)_{pf} - \left(c_{n\,\text{örtl}} - c_{n\,\text{örtl}_{\beta=0}}\right)_{\varphi=0}$$

= zusätzlicher von der Pfeilung herrührender örtlicher Auftriebsbeiwert,

x_s, y_s Koordinaten des geometrischen Neutralpunktes (= Flächenschwerpunkt einer Flügelhälfte),

x_N, y_N Koordinaten des aerodynamischen Neutralpunktes (Abb. 12),

y_{Ng} y-Koordinate des aerodynamischen Neutralpunktes beim geraden Flügel,

$x'_N = x_s - x_N$, $y'_N = y_s - y_N$ Abstandskoordinaten des aerodynamischen Neutralpunktes vom Flächenschwerpunkt (Abb. 12),

$(x'_N)_g$ Neutralpunktsverschiebung des Pfeilflügels mit der Auftriebsverteilung des geraden Flügels (Abb. 12),

$\Delta x_N = x_N - x_{Ng}$, $\Delta y_N = y_N - y_{Ng}$ Neutralpunktsverschiebung des Pfeilflügels infolge Änderung der Auftriebsverteilung gegenüber dem ungepfeilten Flügel (Abb. 12),

Momentenachse: Achse durch $l/4$-Punkt des Profilschnittes im Flächenschwerpunkt einer Flügelhälfte = geometrische Neutralachse.

[1] Dr. *Young*, Theoretical additional span-loading characteristics of wings with arbitrary sweep, aspect ratio and taper ratio. N. A. C. A. Techn. Note No. 1491.

[2] *I. Weissinger*, Jb. 1940 dtsch. Luftf.-Forschg., S. I 145.

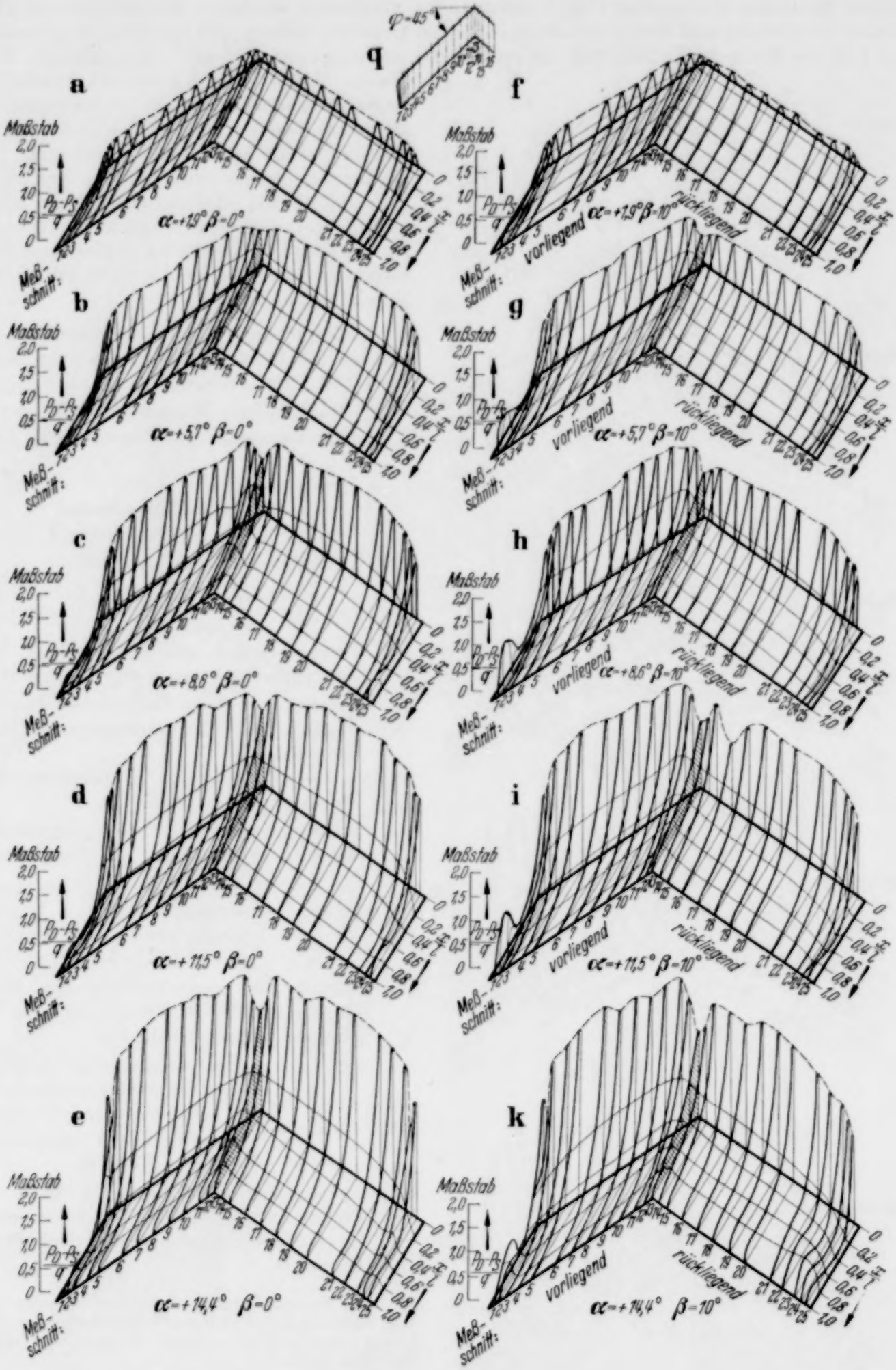
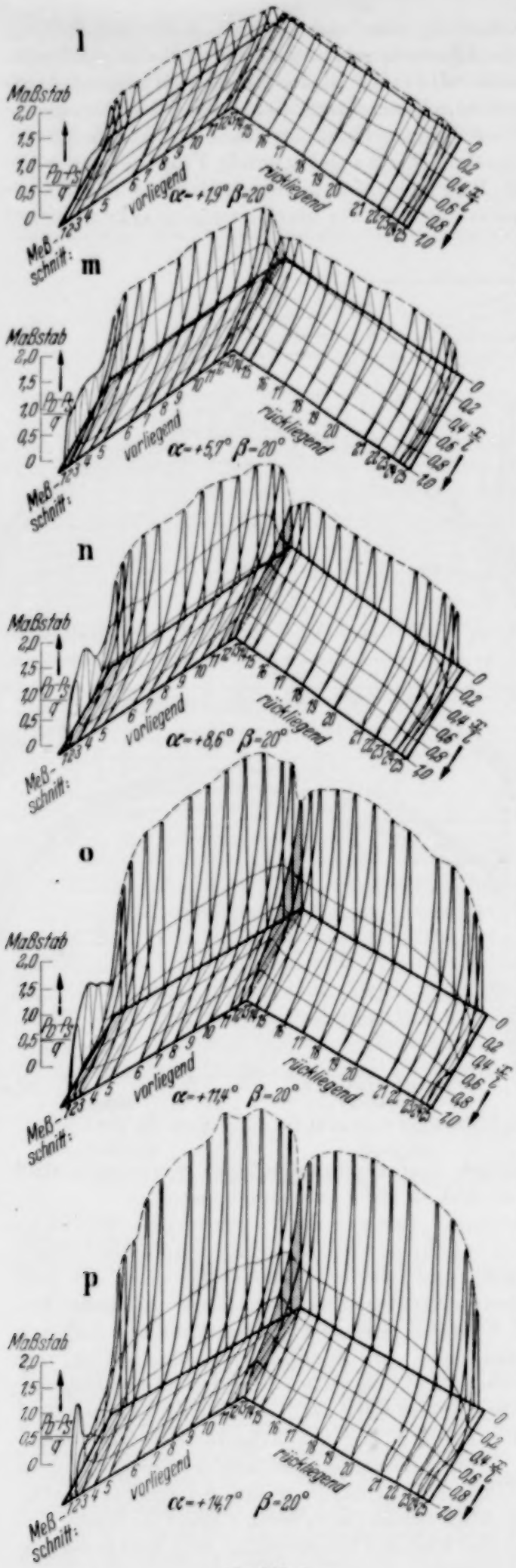


Abb. 4. Normalkraftverteilungen am Pfeilflügel 10/45. $\alpha = +1{,}9;\ 5{,}7;\ 8{,}5;\ 11{,}4;\ 14{,}3°;\ \beta = 0,\ 10,\ 20°$.



Zu Abb. 4.

Profilbezeichnung: Die ersten beiden Ziffern geben die Zuspitzung in Zehnerprozenten und die beiden letzten die Pfeilstellung an. Z. B. 10/30: $Z = 1{,}0$; $\varphi = 30°$.

Weitere Bezeichnungen siehe I. Mitteilung.

3. Modelle. Für die Untersuchungen wurden vier Flügel konstanter Tiefe mit den Pfeilwinkeln $\varphi = 0$, 15, 30 und 45° benutzt (Abb. 1). Sämtliche Flügel haben gleiche Tiefe, gleiche Spannweite und gleiches Seitenverhältnis ($\Lambda = 5{,}18$). Als Profil in Schnitten parallel zur Symmetrieebene wurde NACA 23012 gewählt. Die Flügelenden waren mit der üblichen Abrundung versehen, wonach der jeweilige Abrundungsradius gleich der halben örtlichen Profildicke ist. V-Stellung und Verwindung waren nicht vorhanden.

Die genauen Abmessungen der Flügel sind:
$b' = 0{,}770$ m, $b = 0{,}750$ m, $F = 0{,}1146$ m²,
$l = 0{,}150$ m, $\Lambda = 5{,}18$.
Die Lage der Meßschnitte und Anbohrungen ist aus Abb. 1 zu ersehen.

4. Durchführung und Ergebnisse der Messung. Die Messungen wurden im Windkanal des Aerodynamischen Instituts der Technischen Hochschule zu Braunschweig durchgeführt. Bei einer Windgeschwindigkeit von 40 m/sec betrug die *Reynolds*sche Zahl $Re = vl/\nu = 4{,}2 \cdot 10^5$. Neben den Druckverteilungsmessungen wurden auch stets Kraftmessungen durchgeführt.

a) Drei- und Sechskomponentenmessungen. Auf die Kraftmessungen wollen wir hier im einzelnen nicht eingehen, sondern nur auf die I. Mitteilung verweisen, in der die Ergebnisse einer großen Systematik von trapezförmigen Pfeilflügeln mitgeteilt wurden. Die Neutralpunktlagen sind in Tabelle 1 und 2 enthalten.

b) Druckverteilungsmessungen. Die Ergebnisse der Druckverteilungsmessungen in den verschiedenen Schnitten sollen hier im einzelnen nicht wiedergegeben werden. Bis auf die von der Randumströmung beeinflußten äußeren Schnitte zeigen die Kurven den normalen Verlauf. Für statische Berechnungen interessieren vor allem die Gesamtlastverteilungen [Normalkraftverteilungen $[(p_D - p_S)/q]$ über Flügeltiefe und die integrierten Werte längs Spannweite, also die Auftriebsverteilungen, die natürlich auch für Stabilitätsbetrachtungen wichtig sind. Die ersteren Werte sind in einer Schrägprojektion über dem Flügel aufgetragen und zwar für die Schiebewinkel $\beta = 0$, 10 und 20° (Abb. 2 bis 4)[1]. Die Punkte gleicher Rücklage sind durch

[1] Die Normalkraftverteilungen für den Rechteckflügel siehe bei *Möller*: Druckverteilungsmessungen an einem Hoch- und Tiefdecker bei symmetrischer und unsymmetrischer Anströmung. Techn. Berichte, Bd. 11, Heft 5 (1944), Abb. 35 bis 38.

dünne Kurven miteinander verbunden, ebenfalls sind die maximalen Werte durch Strichelung verbunden. Bei allen Flügeln ist in symmetrischer Anströmung ein starker lokaler Einbruch in der Auftriebsverteilung im Mittelschnitt vorhanden. Ferner ist aus dieser Auftragung deutlich zu entnehmen, daß bei den gepfeilten Flügeln mit zunehmendem Schiebewinkel die vorgehende Flügelhälfte stärker trägt als die rückliegende. Dieser Unterschied ist um so stärker, je größer der Pfeilwinkel ist. Beim geraden Flügel dagegen erhält der zurückgehende Flügel etwas mehr Auftrieb als der vorgehende, abgesehen von den Randgebieten, an denen infolge der Randumströmung an der vorderen Ecke eine starke positive und an der hinteren eine starke negative Auftriebsspitze auftritt.

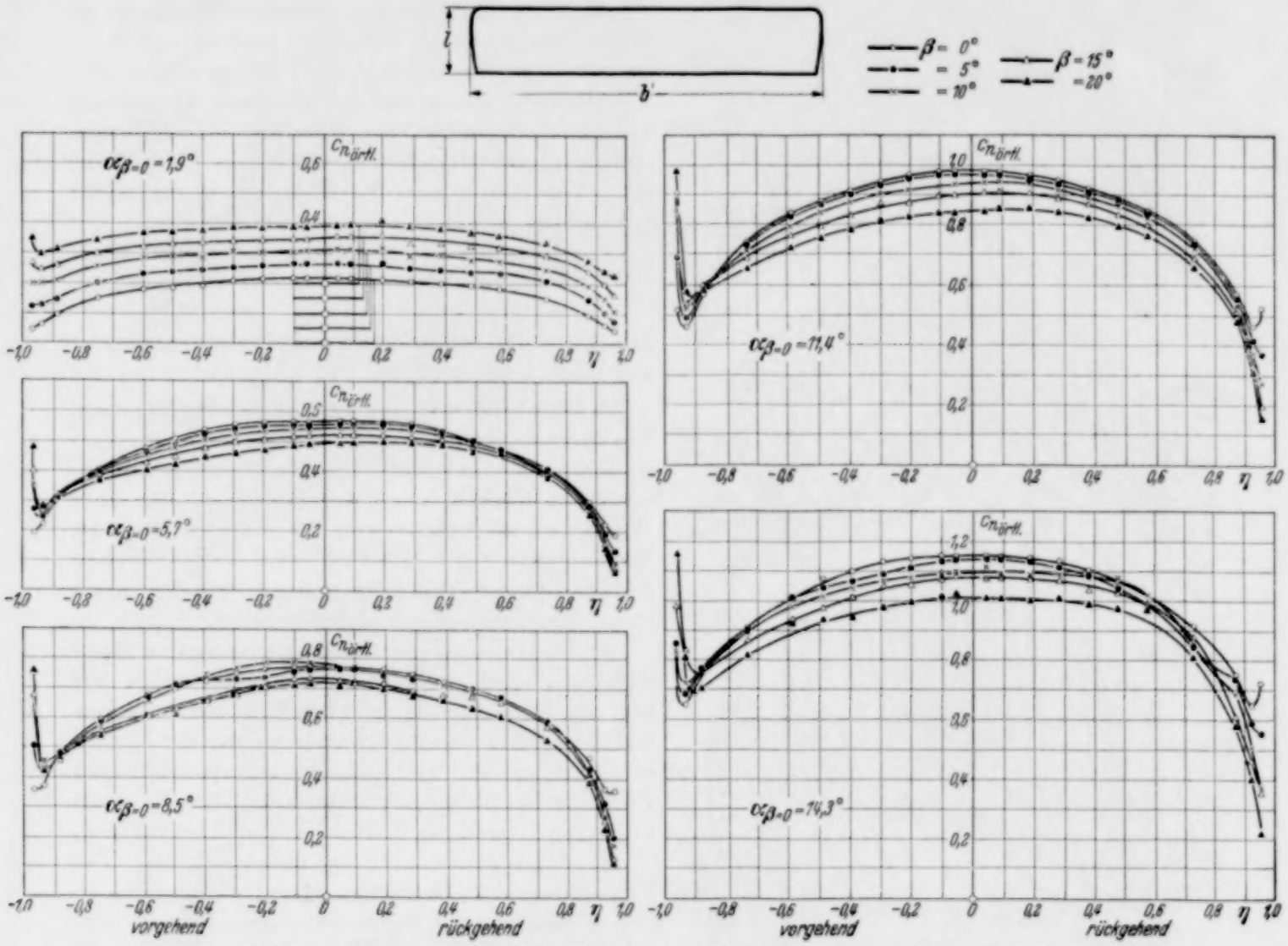


Abb. 5. Auftriebsverteilungen am Rechteckflügel 10/00. $\alpha = +\,1{,}8;\ 5{,}6;\ 8{,}5;\ 11{,}4;\ 14{,}3°$; $\beta = 0,\ 5,\ 10,\ 15,\ 20°$.

Die aus den Druckverteilungsmessungen erhaltenen Lastverteilungen längs Spannweite sind in Form der örtlichen Normalkraftbeiwerte $c_{n\,örtl}$ in Abb. 5 bis 8 zusammengestellt.

Betrachten wir zunächst einmal die Auftriebsverteilungen bei symmetrischer Anströmung (Abb. 14 bis 17), so sehen wir, daß die Auftriebsverteilung mit wachsender Pfeilstellung des Flügels eine wesentliche Änderung erfährt, und zwar tritt eine Verlagerung des Auftriebes nach den Flügelenden hin auf. Während beim Rechteckflügel eine kontinuierliche Abnahme des Auftriebes nach außen hin stattfindet, wird bei größeren Pfeilwinkeln der Auftrieb in der Mitte so stark abgebaut, daß nach außen hin sogar eine Zunahme festzustellen ist. Im $c_{a\,max}$-Bereich wird dies zur Folge haben, daß der Beginn des Abreißens der Strömung sich mit wachsender Pfeilstellung nach außen verschiebt. Unterstützt wird die Ablösung im äußeren Teil noch durch den „Grenzschichteffekt". Infolge der Pfeilstellung des Flügels tritt ein Druckgradient in Querrichtung auf, dem vor allem das Grenzschichtmaterial infolge seiner geringen Trägheitskräfte folgt. Beim rückwärts gepfeilten Flügel ist auf der Saugseite infolge der Druckabnahme nach außen eine Anhäufung des Grenzschichtmaterials im äußeren Gebiet festzustellen, was die Abreißgefahr in diesem Teil erhöht. Die von der Pfeilung herrührende Auftriebsänderung und der Grenzschichteffekt wirken also im gleichen Sinne.

Infolge der durch Pfeilung hervorgerufenen örtlichen Auftriebsänderungen wird eine Verschiebung des Lastschwerpunktes einer Flügelhälfte und damit der Neutralpunktlage gegenüber dem geraden Flügel bewirkt. Wir wollen diese Neutralpunktverschiebung durch Pfeilstellung aus unseren Druckverteilungsmessungen bestimmen.

Im ersten Teilbericht hatten wir die Beziehung abgeleitet [I. Mitteilung, Gleichung (5)]

$$\frac{\Delta x_N}{l} = \frac{\Delta y_N}{b/2}\,\frac{b}{2\,l}\,\mathrm{tg}\,\varphi\,, \tag{1}$$

wobei $\Delta x_N/l$ die Neutralpunktverschiebung infolge Auftriebsänderung des Pfeilflügels gegenüber

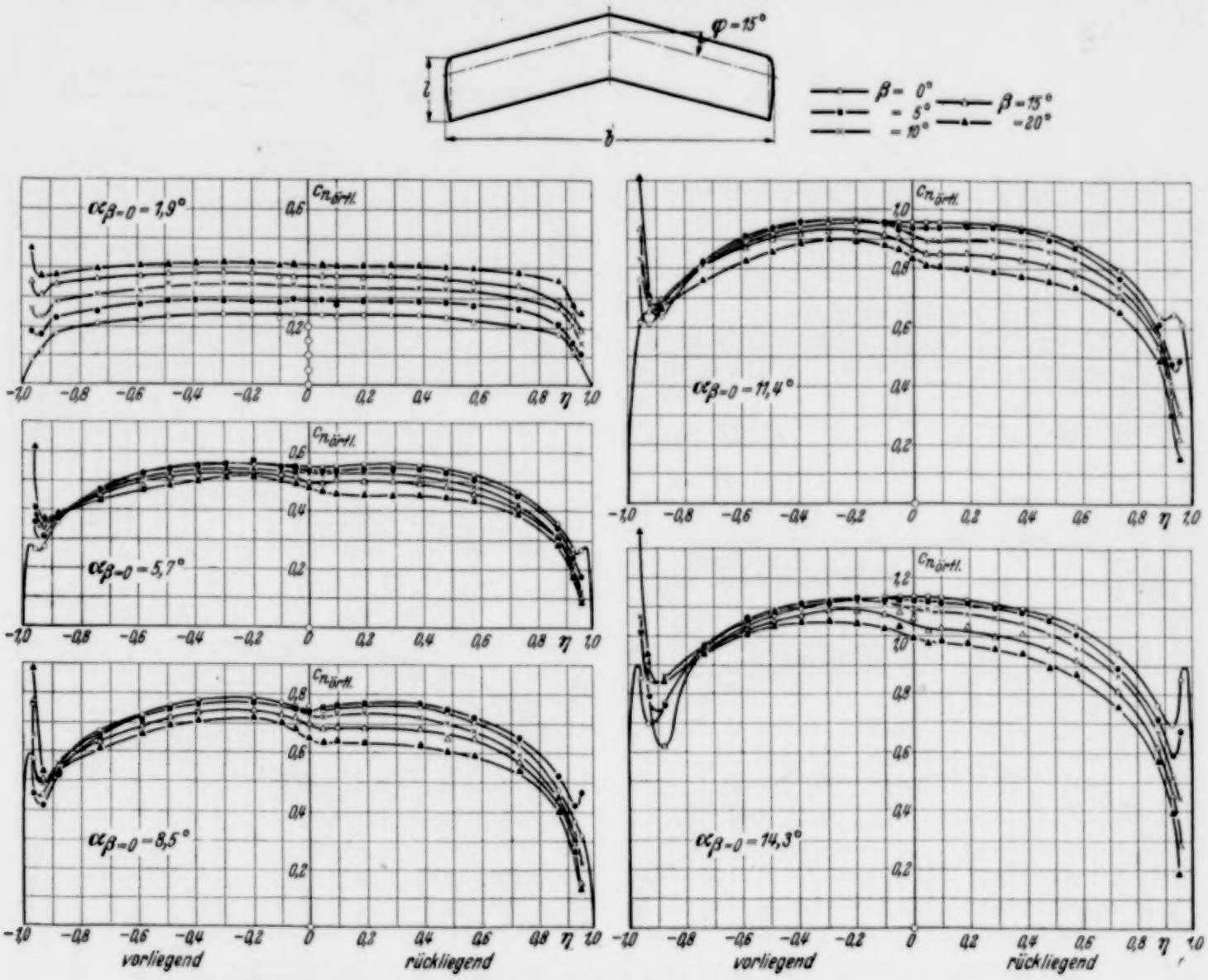


Abb. 6. Auftriebsverteilungen am Pfeilflügel 10/15. $\alpha = +1{,}9;\ 5{,}7;\ 8{,}5;\ 11{,}4\ 14{,}3°$; $\beta = 0,\ 5,\ 10,\ 15,\ 20°$.

dem ungepfeilten Flügel bedeutet (Abb. 12). Als gesamte Neutralpunktverschiebung gegenüber dem geraden Flügel ergibt sich, wenn wir die einzelnen Einflüsse getrennt aufführen,

$$\frac{x_N}{l} = \frac{y_N}{b/2}\,\frac{b/2}{l}\,\mathrm{tg}\,\varphi = \left(\frac{y_s}{b/2} + \frac{y_{Ng} - y_s}{b/2} + \frac{y_N - y_{Ng}}{b/2}\right)\frac{b}{2\,l}\,\mathrm{tg}\,\varphi\,. \tag{2}$$

In dieser Beziehung stellt der erste Term die Verschiebung des Flächenschwerpunktes infolge der Pfeilstellung dar, was gleichbedeutend ist mit der Neutralpunktsverschiebung bei konstanter $c_{n\,örtl}$-Verteilung; der zweite Term umfaßt die Verschiebung, die dadurch entsteht, daß die Auftriebsverteilung des Rechteckflügels von der konstanten $c_{n\,örtl}$-Verteilung abweicht; der dritte Term schließlich gibt die weitere zusätzliche Verschiebung infolge der Abweichung der Auftriebsverteilung des Pfeilflügels von derjenigen des ungepfeilten Flügels an.

Aus der Lage der Lastschwerpunkte einer Flügelhälfte können wir sämtliche oben abgeleiteten Größen bestimmen. Den Abstand des Lastschwerpunktes von der Symmetrieebene (y_N) erhalten

wir aus der gemessenen Auftriebsverteilung auf graphischem Wege, indem wir bilden

$$\eta_N = \frac{y_N}{b/2} = \frac{\int_0^1 c_n \eta \, d\eta}{\int_0^1 c_n \, d\eta} . \tag{3}$$

Diese für alle vier Flügel ermittelten Werte sind in Tabelle 2 enthalten. Hierbei wurde der Mittelwert gebildet für die Anstellwinkel $\alpha = 1{,}9$; 5,7; 8,5 und 11,4°. Der größte Anstellwinkel wurde fortgelassen, weil in diesem Falle schon örtliche Abreißerscheinungen auftreten, und infolge-

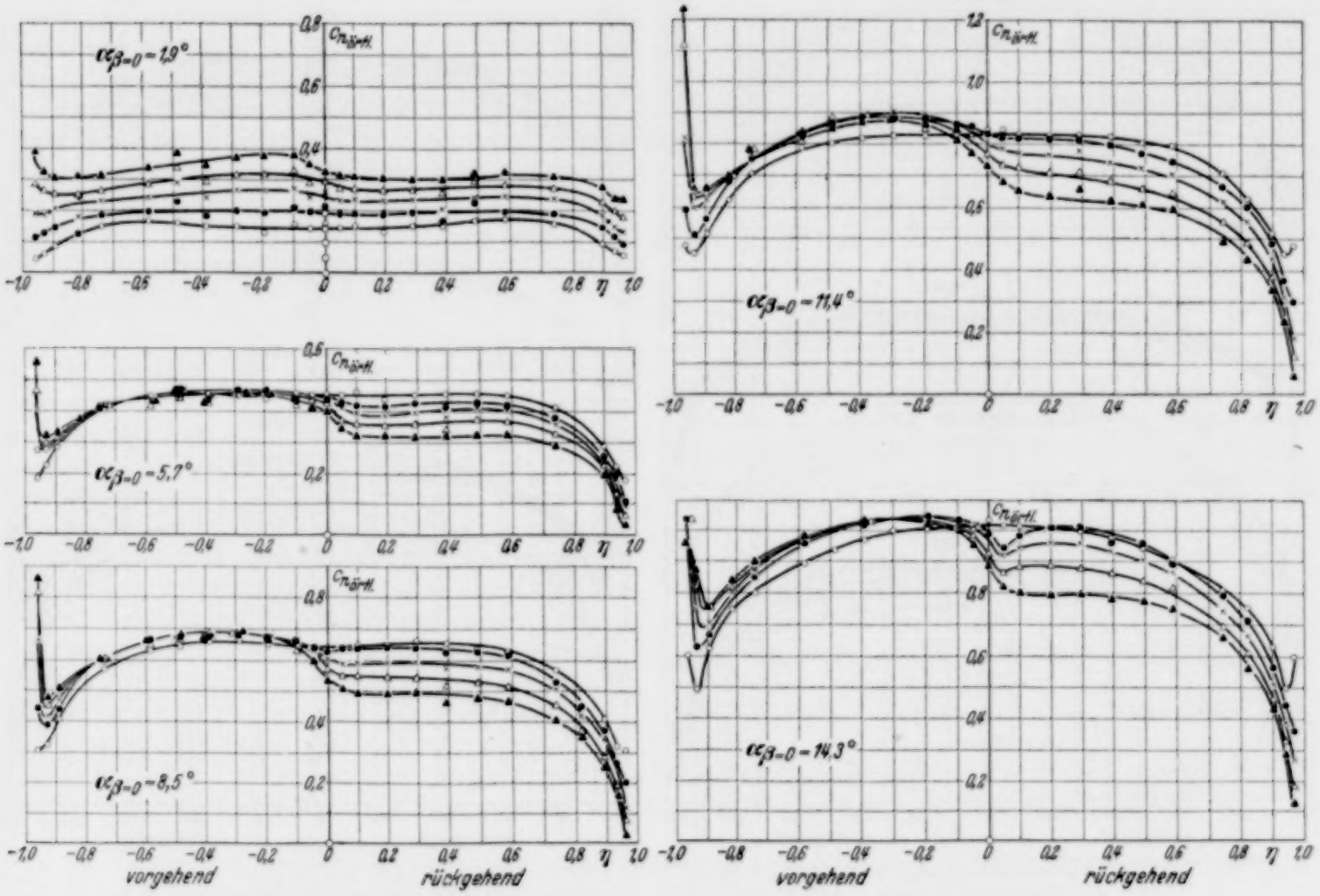


Abb. 7. Auftriebsverteilungen am Pfeilflügel 10/30. $\beta = +1{,}9$; 5,7; 8,5; 11,4; 14,3°; $\beta = 0$, 5, 10, 15, 20°.

dessen das Ergebnis fälschen können. Aus der Größe $y_N/\frac{1}{2}b$ und aus der Pfeilung lassen sich dann nach obigen Beziehungen die Neutralpunktverschiebungen berechnen. Diese sind in Tabelle 2, 3 aufgeführt. Für $y_N/\frac{1}{2}b$ ergibt sich ein Anwachsen mit der Pfeilstellung, der Lastschwerpunkt wandert also nach außen. Gegenüber dem Rechteckflügel beträgt diese Wanderung beim Pfeilflügel $\varphi = 45°$ ungefähr 3% der Halbspannweite des Flügels ($\Delta y_N/\frac{1}{2}b = 0{,}031$). Dies entspricht einer zusätzlichen Neutralpunktverschiebung infolge Änderung der Auftriebsverteilung von 8% der Flügeltiefe ($\Delta x_N/l = 0{,}08$). Die Auftriebsverteilung des Rechteckflügels darf daher für die Berechnung der Neutralpunktlage des Pfeilflügels unter keinen Umständen zugrunde gelegt werden.

Bei unsymmetrischer Anströmung, also beim Schieben, erfahren die Auftriebsverteilungen der Flügel recht beträchtliche Änderungen, die stark von der Pfeilung abhängen (Abb. 5 bis 8). Abgesehen von den Flügelenden zeigt der Rechteckflügel an der vorgehenden Flügel-

hälfte eine stärkere Abnahme der Auftriebsverteilung als an der zurückgehenden, wie Abb. 5 zeigt, auf dem die Verteilungen jeweils für einen festen Anstellwinkel bei den Schiebewinkeln $\beta = 0$, 10, 15 und 20° zusammengetragen sind. Anders liegen die Verhältnisse bei gepfeilten Flügeln. Bei dem Pfeilflügel $\varphi = 15°$ (Abb. 6) ist schon deutlich sichtbar, daß der Auftriebsverlust beim Schieben auf der rückgehenden Hälfte stärker ist als auf der vorgehenden. Noch stärker tritt der Einfluß der Pfeilung bei dem Flügel $\varphi = 30°$ hervor (Abb. 7). Hier ist der Auftrieb an der vorgehenden Flügelhälfte fast unabhängig vom Schiebewinkel β, an der rückgehenden tritt eine beträchtliche Abnahme auf. Setzen wir den Gesamteinfluß am schiebenden Pfeilflügel zusammen aus dem des schiebenden Rechteckflügels und einem zusätzlichen Pfeileffekt, so ist bei dem 30°-gepfeilten Flügel die Zunahme des Auftriebs an der vorgehenden Flügelhälfte in-

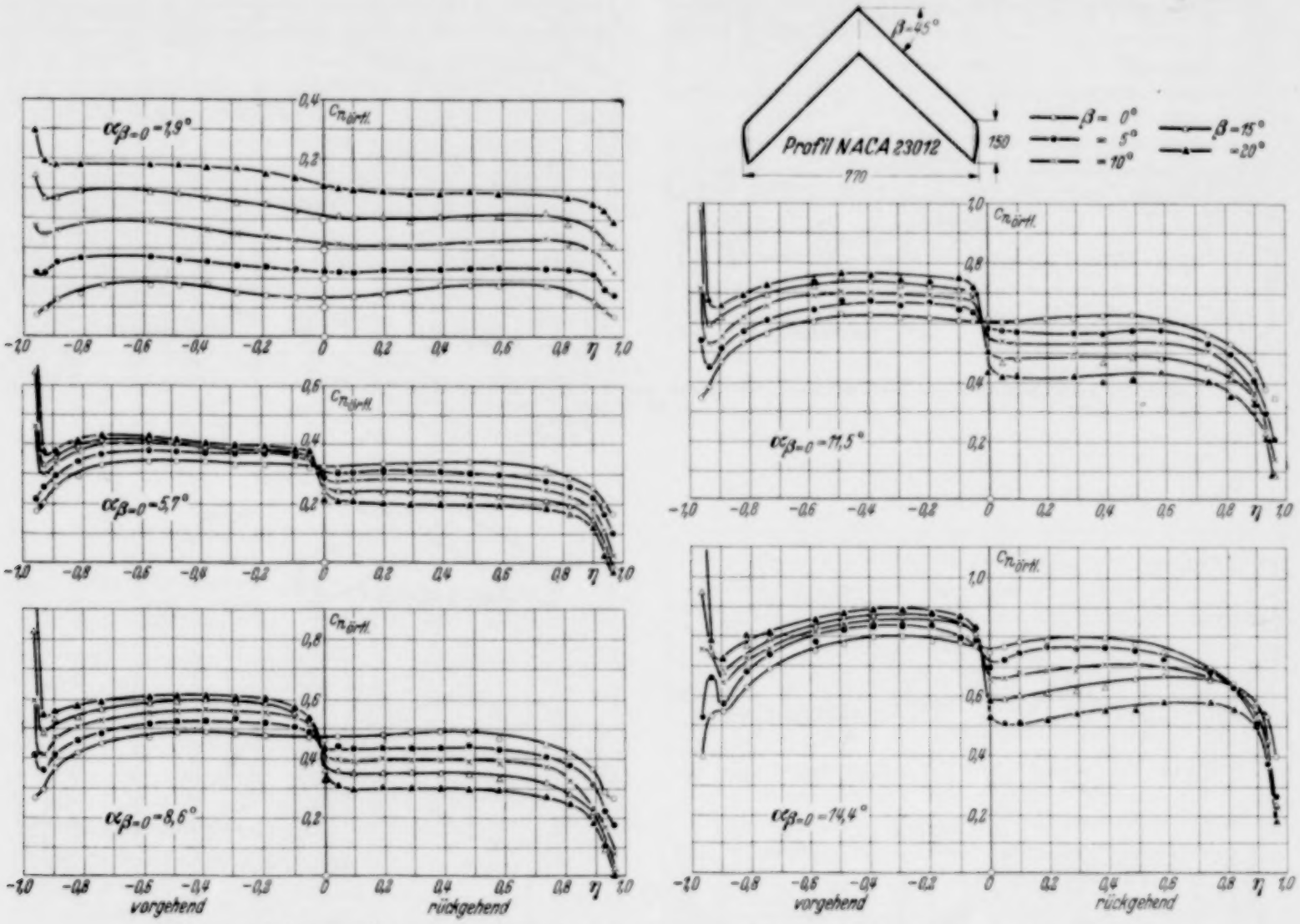


Abb. 8. Auftriebsverteilungen am Pfeilflügel 10/45. $\alpha = +1{,}9;\ 5{,}7;\ 8{,}6;\ 11{,}5;\ 14{,}4°$; $\beta = 0,\ 5,\ 10,\ 15,\ 20°$.

folge des Pfeileffektes ungefähr gleich der Abnahme des Auftriebs beim geraden Flügel, so daß sich diese beiden Einflüsse nahezu aufheben. An der rückgehenden Hälfte tritt eine besonders starke Abnahme auf, da sich hier die Einflüsse unterstützen, denn auch der Rechteckflügel zeigt an der rückgehenden Hälfte eine Abnahme, die allerdings schwächer ist als an der vorgehenden.

Der Flügel mit der Pfeilung $\varphi = 45°$ zeigt schon ein beträchtliches Überwiegen des Pfeileffektes, d. h. es tritt auch an der vorgehenden Hälfte eine merkliche Zunahme des Auftriebs mit dem Schiebewinkel ein (Abb. 8). Die Abnahme auf der rückgehenden Hälfte wird noch stärker als bisher.

Den reinen Einfluß der Pfeilung gegenüber dem Rechteckflügel erhalten wir, wenn wir die Differenzen der $\Delta c_{n\,örtl.}$-Werte des Pfeilflügels gegenüber denen des Rechteckflügels bilden:

$$(\Delta c_{n\,örtl})_{Pf} = (c_{n\,örtl} - c_{n\,örtl_{\beta=0}})_{Pf} - (c_{n\,örtl} - c_{n\,örtl_{\beta=0}})_{\varphi=0}\,. \tag{4}$$

Diese ausschließlich von der Pfeilung herrührenden zusätzlichen Normalkraftbeiwerte sind für die Pfeilflügel ermittelt worden, wobei gleiche geometrische Anstellwinkel bei Pfeilflügel und

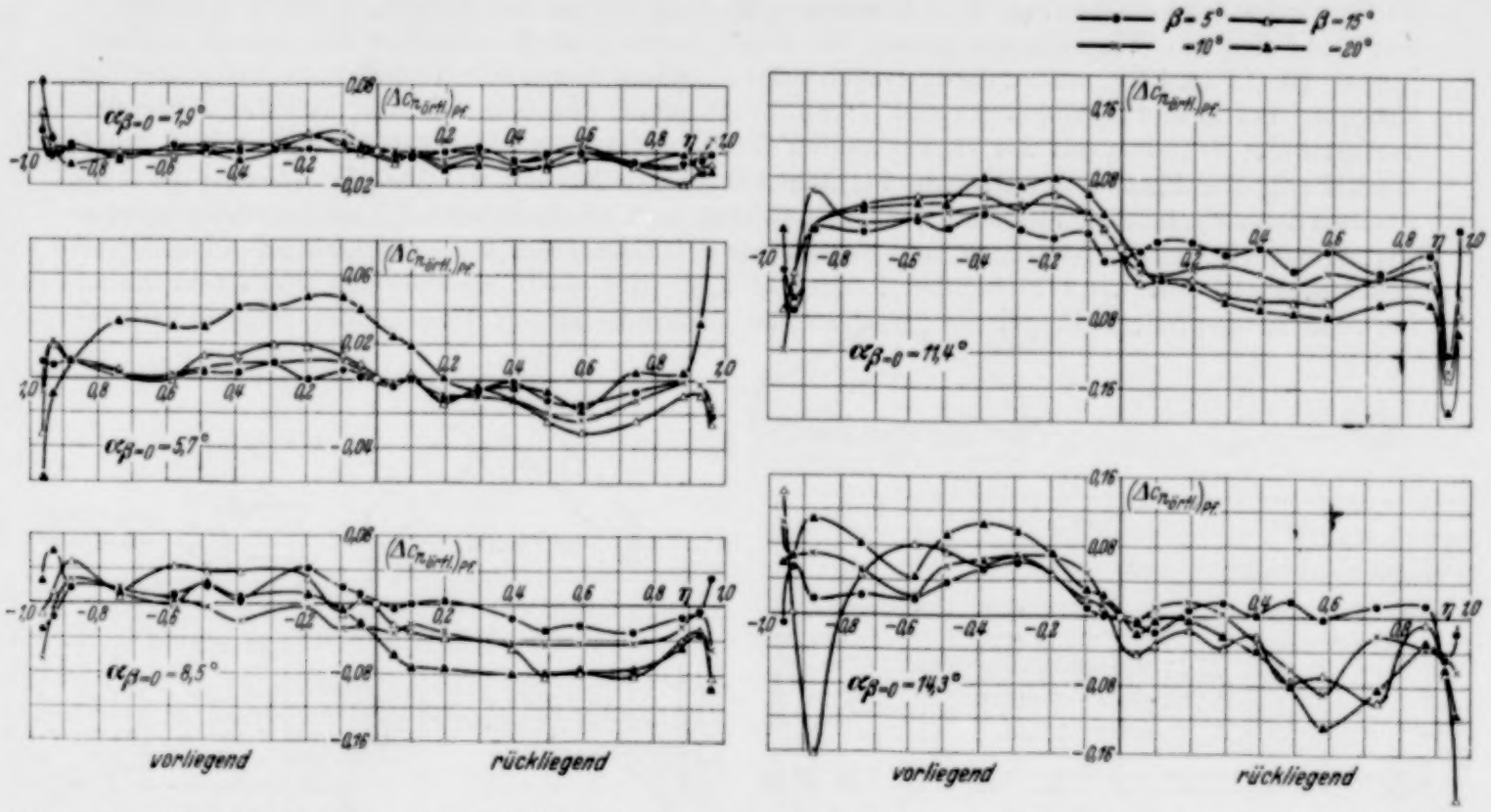


Abb. 9. Zusätzliche Auftriebsänderungen beim Schieben, herrührend von der Pfeilstellung. Pfeilflügel 10/15. $\alpha = +1{,}9;\ 5{,}7;\ 8{,}5;\ 11{,}4;\ 14{,}3°$; $\beta = 5,\ 10,\ 15,\ 20°$.

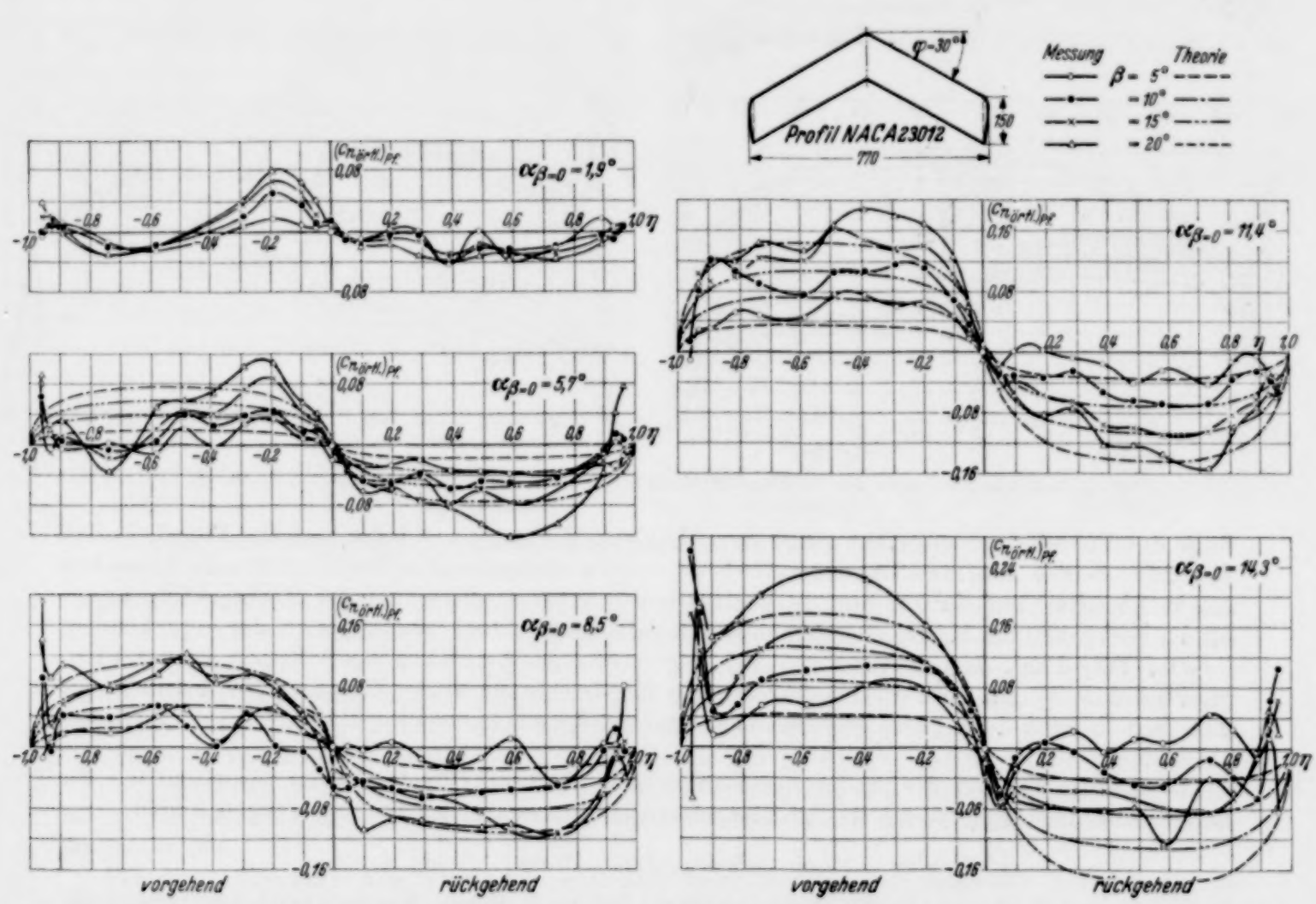


Abb. 10. Zusätzliche Auftriebsänderungen beim Schieben, herrührend von der Pfeilstellung. Pfeilflügel 10/30. $\alpha = +1{,}9;\ 5{,}7;\ 8{,}5;\ 11{,}4;\ 14{,}3°$; $\beta = 5,\ 10,\ 15,\ 20°$.

Rechteckflügel zugrunde gelegt wurden. Die Ergebnisse sind für die drei Pfeilflügel bei $\beta = 5$, 10, 15 und 20° in Abb. 9 bis 11 aufgetragen. Der Pfeileffekt wirkt sich auf beiden Flügelhälften ungefähr gleich aus, die Kurven verlaufen nahezu antimetrisch. Sie sind proportional dem Schiebewinkel β und dem Anstellwinkel. Außerdem wächst der Einfluß natürlich mit der Pfeilung selber. Eine ziemlich sprunghafte Änderung des Pfeileffektes ist in Flügelmitte zu beobachten. Die Werte $(\Delta c_{n\,\ddot{o}rtl})_{Pf}$ gehen hier in einem ziemlich schmalen Gebiet von positiven Werten des

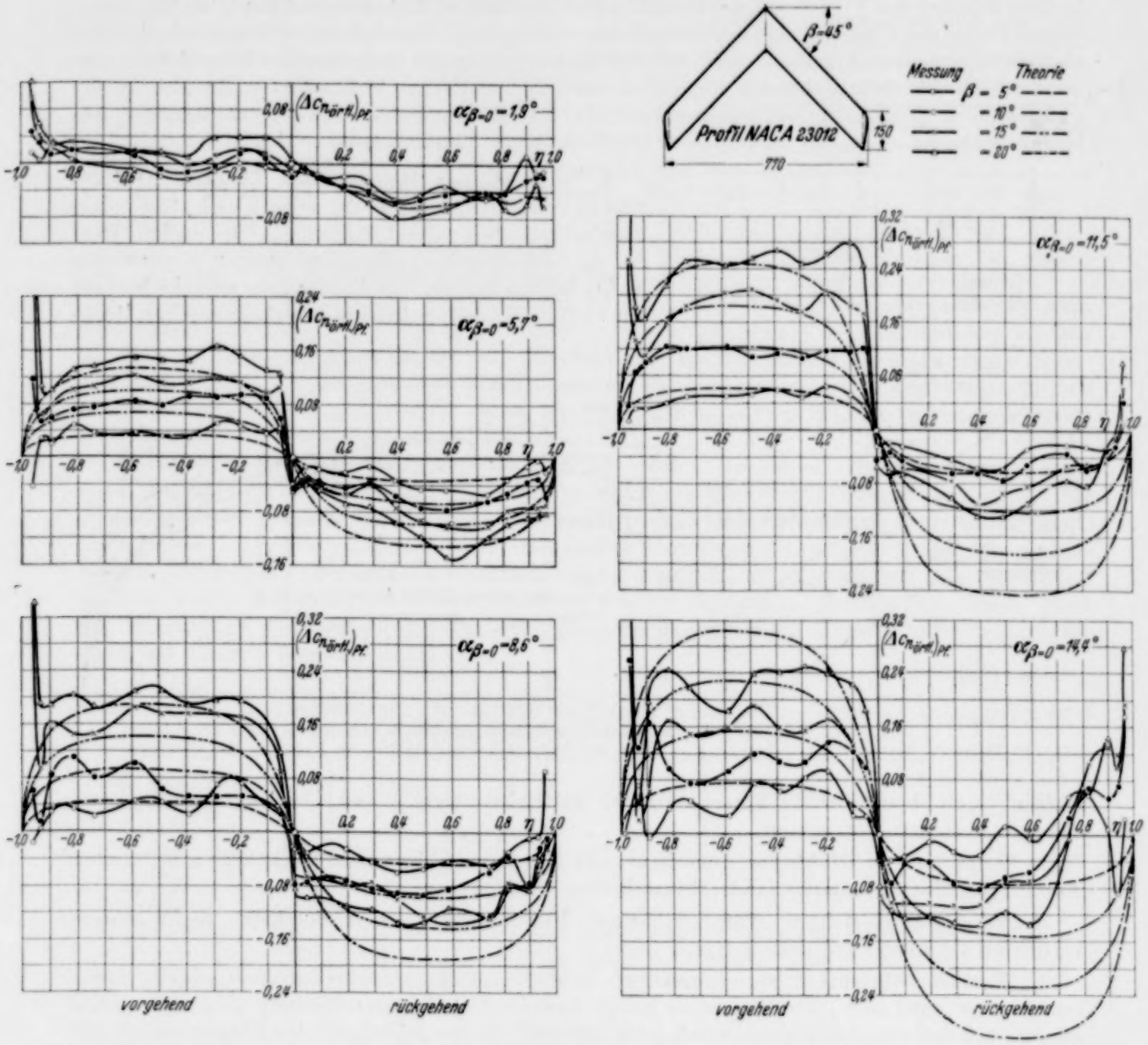


Abb. 11. Zusätzliche Auftriebsänderungen beim Schieben, herrührend von der Pfeilstellung. Pfeilflügel 10/45. $\alpha = +1{,}9$; 5,7; 8,6; 11,5; 14,4°; $\beta = 5$, 10, 15, 20°.

vorgehenden Flügels zu negativen des zurückgehenden Flügels über. Im höheren Anstellwinkelbereich verlaufen die Kurven nicht mehr antimetrisch. Die Abnahme des Auftriebs an der zurückgehenden Hälfte ist wesentlich geringer als die Zunahme an der vorgehenden Flügelhälfte. Bemerkenswert an der zusätzlichen Auftriebsverteilung infolge der Pfeilung ist die ziemlich konstante Verteilung in einem großen Bereich der Halbspannweite, ähnlich dem Einfluß der *V*-Stellung eines Flügels auf die Auftriebsverteilung beim Schieben. Diese Tatsache wird uns, wie später näher ausgeführt, zu einer näherungsweisen Berechnung der Auftriebsverteilung eines schiebenden Pfeilflügels führen[1].

[1] Da die großen Auftriebsspitzen an den Flügelenden nach der Messung nur ungenau erfaßt werden können, beim Rollmoment aber wegen des großen Hebelarmes stark eingehen, wurde auf die Ermittlung des Rollmomentes aus den Druckverteilungen verzichtet.

Das durch die antimetrische zusätzliche Auftriebsverteilung erzeugte positive Rollmoment kann im Gebiet des Auftriebsmaximums durch Abreißerscheinungen ins Gegenteil umschlagen. Diese Gefahr besteht vor allem bei stärker gepfeilten Flügeln, an denen mit zunehmendem Schiebewinkel der vorgehende Flügel erhöhten Auftrieb bekommt und daher leicht den maximalen Auftriebsbeiwert überschreiten kann. Es ist hierbei jedoch auch noch der Grenzschichteffekt zu berücksichtigen, der vor allem bei größeren c_a-Werten infolge des starken Druckgradienten in Querrichtung des Flügels ein starkes Abfließen von Grenzschichtmaterial bewirkt, was in gewissen Teilen des Flügels erhöhte Ablösegefahr zur Folge hat. Betrachten wir einen schiebenden rückwärts gepfeilten Flügel, so wird die Schräganströmung der vorgehenden Flügelhälfte vermindert, die der zurückgehenden dagegen verstärkt. Der Grenzschichteffekt wirkt also an der rückgehenden Flügelhälfte mit wachsendem Schiebewinkel im Sinne einer Verstärkung der Ablösung, während er an der vorgehenden im Sinne einer Verminderung wirkt.

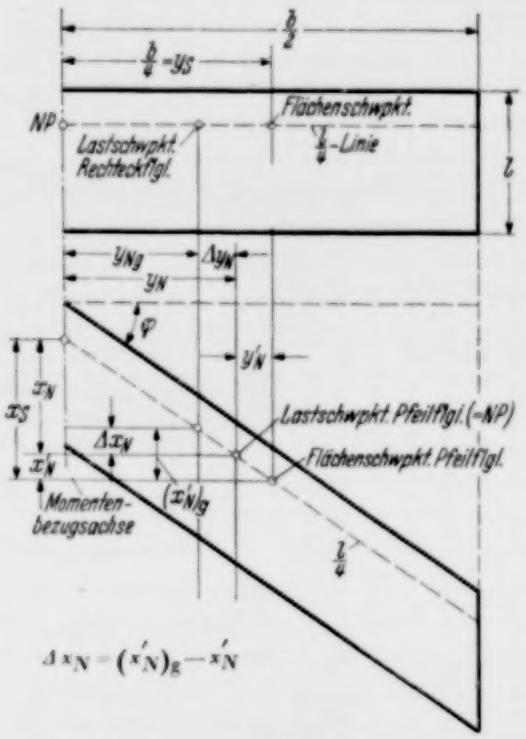


Abb. 12. Skizze zur Neutralpunktberechnung.

5. Vergleich von Messung und Theorie. a) Auftriebsverteilung und Neutralpunktlage bei symmetrischer Anströmung. Wir wollen jetzt die aus den Druckverteilungsmessungen gewonnenen Auftriebsverteilungen von Pfeilflügeln und die hieraus ermittelten Neutralpunktlagen mit theoretischen Rech-

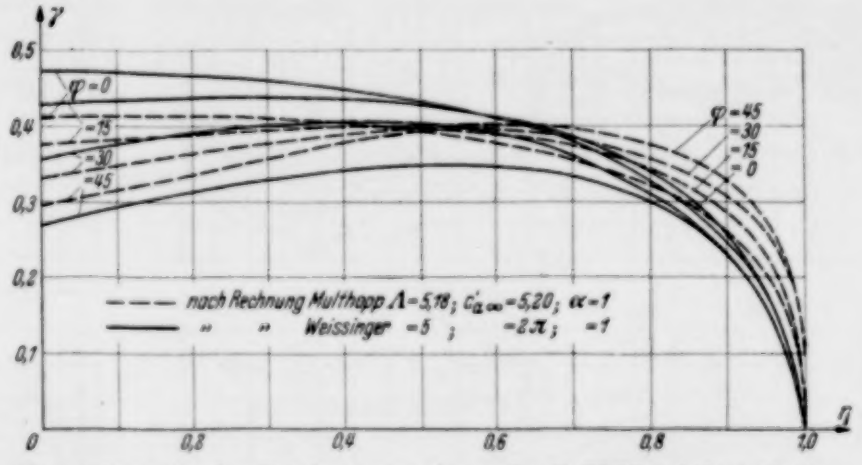


Abb. 13. Dimensionslose Zirkulationsverteilungen für die Pfeilflügel 10/00, 10/15, 10/30 und 10/45 nach den Verfahren von *Weissinger* und *Multhopp*.

nungen vergleichen. Für die Berechnung der Auftriebsverteilung von Pfeilflügeln wollen wir folgende Verfahren betrachten.

1. Verfahren von *Multhopp*. Dies baut auf der *Prandtl*schen Traglinientheorie auf unter Anbringung eines bestimmten Korrekturfaktors.

2. „Tragflächenverfahren" von *Weissinger*. Hierbei wird eine flächenhafte Zirkulationsverteilung am Flügel zugrunde gelegt.

3. „Traglinienverfahren" von *Weissinger*. In diesem Falle wird wieder die tragende Linie benützt. Sie wird in $^1/_4$ der Flügeltiefe gelegt, und die Zirkulationsverteilung wird nun so bestimmt, daß der vom Wirbelsystem induzierte Abwind auf der $3\,l/4$-Linie des Flügels gleich der Normalkomponente der Anblasgeschwindigkeit ist.

An weiteren Verfahren wären zu nennen das von *Falkner* und das von *Mutterperl*. Das Verfahren von *Falkner* liefert ungefähr dieselbe Genauigkeit wie *Weissinger*, ist jedoch wesentlich mühsamer, während das Verfahren von *Mutterperl* keine Verbesserung darstellt.

Weissinger hat gezeigt, daß zwischen dem Tragflächenverfahren und dem Traglinienverfahren im Ergebnis praktisch kein Unterschied besteht, und man daher ohne Bedenken das einfachere Traglinienverfahren anwenden kann. Am einfachsten ist das Verfahren von *Multhopp*. Es zeigt sich jedoch, daß dieses Verfahren für größere Pfeilwinkel unzureichende Ergebnisse liefert.

Die dimensionslosen Zirkulationsverteilungen $\gamma(\eta)$ für die verschiedenen Pfeilflügel, berechnet nach den Verfahren von *Weissinger* und *Multhopp*, sind in Abb. 13 enthalten. Dabei bedeutet $\gamma = \Gamma/b\,v$. Die Rechnung von *Weissinger* gilt für $c'_{a\infty} = 2\pi$, während nach *Multhopp* mit $c'_{a\infty} = 5{,}20$ gerechnet wurde. Bei dem Verfahren von *Multhopp* wurde der Korrekturfaktor $\varkappa = 1$ gesetzt. Aus dem Vergleich von Theorie und Messung ist folgendes zu entnehmen:

1. Auftriebsanstieg. Nach *Multhopp* ist der Proportionalitätsfaktor zwischen Zirkulation und effektivem Anstellwinkel unabhängig vom Pfeilwinkel, also $\partial c_a/\partial \alpha = \text{konst}$. Die Theorie der tragenden Fläche nach *Weissinger* liefert jedoch einen Abfall des Gesamtauftriebes und damit des Auftriebsanstieges mit wachsender Pfeilung. Die nach *Weissinger* ermittelten Werte $\partial c_a/\partial \alpha$ sind mit in Tabelle 1 enthalten. Es ergibt sich nach der Messung eine kleinere Abnahme von $\partial c_a/\partial \alpha$ als nach der Theorie, und zwar beträgt sie ungefähr 60% des theoretischen Wertes.

2. Auftriebsverteilung. Wichtiger als die Frage nach dem Gesamtauftrieb ist die Frage nach der Form der Auftriebsverteilung, denn diese ist maßgebend für die Lage des Neutralpunktes und für das Abreißverhalten bei großen Anstellwinkeln. Der Vergleich der theoretischen Auftriebsverteilung mit der aus der Druckverteilung ermittelten ist in Abb. 14 bis 17 enthalten. Es sind hierbei die nach *Weissinger* und *Multhopp* errechneten Verteilungen jeweils auf die entsprechenden c_n-Werte der Messung umgerechnet worden. Wie aus Abb. 14 ersichtlich, zeigt schon der Verlauf der Kurven beim Rechteckflügel merkliche Unterschiede. Die Auftriebsverteilung nach *Multhopp* ist völliger als die nach *Weissinger*. Die Theorie von *Weissinger* liefert eindeutig eine bessere Übereinstimmung mit den Druckverteilungsmessungen als die von *Multhopp*. Dieser Unterschied kann also durch Nichtberücksichtigung der flächenhaften Zirkulationsverteilung erklärt werden. Er ist natürlich auch in der Berechnung der Auftriebsverteilung am Pfeilflügel enthalten. Hinzu kommen noch andere Unterschiede der beiden Berechnungsverfahren.

Tabelle 1. *Momentenanstieg und Auftriebsanstieg; Bezugspunkt: l/4-Punkt des Profilschnittes im Flächenschwerpunkt einer Flügelhälfte.*

$\varphi°$	Kraftmessung		Weissinger
	$\partial c_{M}/\partial c_a$	$\partial c_a\,\partial/\alpha$	$\partial c_a/\partial \alpha$
0	0	3,89	3,90
15	0,020	3,85	3,77
30	0,031	3,62	3,49
45	0,040	3,33	3,00

Der Vergleich für die Pfeilflügel ist in Abb. 15 bis 17 enthalten. Die Auftriebsverteilung nach *Weissinger* weist bei allen Pfeilwinkeln gute Übereinstimmung mit der Messung auf. Nur in der Flügelmitte treten für die großen Pfeilungen $\varphi = 30°$ und 45° stärkere Abweichungen auf; die Theorie liefert hier zu kleine Werte. Bei großen Anstellwinkeln ist natürlich infolge von Abreißerscheinungen keine gute Übereinstimmung zu erwarten. Die Theorie von *Multhopp* liefert in allen Fällen weniger gute Übereinstimmung mit der Messung als die von *Weissinger*. Nach der Messung ist die Verlagerung des Auftriebes nach außen mit der Pfeilung nicht so stark wie nach der Theorie von *Multhopp*.

Tabelle 2. *Lage des Lastschwerpunktes einer Flügelhälfte und Neutralpunktverschiebung, hervorgerufen durch Änderung der Auftriebsverteilung; Vergleich von Theorie und Messung.*

$\varphi°$	Druckverteilungsmessung			Kraftmessung			Theorie *Weissinger*[1]			Theorie *Multhopp*[2]			Mittelwert von rechteckiger und elliptischer Auftriebsverteilung		
	$\frac{y_N}{b/2}$	$\frac{\Delta y_N}{b/2}$	$\frac{\Delta x_N}{l}$	$\frac{y_N}{b/2}$	$\frac{\Delta y_s}{b/2}$	$\frac{\Delta x_N}{l}$	$\frac{y_N}{b/2}$	$\frac{\Delta y_N}{b/2}$	$\frac{\Delta x_N}{l}$	$\frac{y_N}{b/2}$	$\frac{\Delta y_N}{b/2}$	$\frac{\Delta x_N}{l}$	$\frac{y_s}{b/2}$	$\frac{\Delta y_s}{b/2}$	$\frac{\Delta x_N}{l}$
0	0,454	0	0				0,451	0	0	0,463	0	0	0,463	0	0
15	0,462	0,008	0,006	0,470	—	—	0,461	0,010	0,007	0,476	0,013	0,009	0,463	0	0
30	0,472	0,018	0,027	0,478	—	—	0,470	0,019	0,028	0,491	0,027	0,039	0,463	0	0
45	0,485	0,031	0,078	0,483	—	—	0,484	0,034	0,085	0,512	0,047	0,118	0,463	0	0

3. Neutralpunktlage. Die genaue Kenntnis der Auftriebsverteilung ist besonders wichtig für die Vorausbestimmung der Lage des Neutralpunktes. Wir wollen untersuchen, wieweit die nach der Messung und nach der Theorie ermittelten Neutralpunktlagen übereinstimmen. Die Ermittlung geschieht auf die Weise, daß wir zunächst die Abstände der Lastschwerpunkte der Flügelhälfte bestimmen und hieraus dann die Neutralpunkte unter der Annahme, daß diese Lastschwerpunkte auf der $l/4$-Linie des Flügels liegen. Die Lage der Lastschwerpunkte ist aus Tabelle 2 zu entnehmen. Hierbei ist nach der Messung der Mittelwert der Auftriebsschwerpunkte für $\alpha = +1{,}9$; 5,7; 8,5 und 11,4° gebildet worden. Die Anstellwinkel $\alpha = -3{,}9$ und $+14{,}3°$ sind nicht berücksichtigt worden, um das Ergebnis nicht zu verfälschen. Die Auswertung wurde graphisch vorgenommen. Wir sehen aus der Tabelle 2, daß die Übereinstimmung mit der Theorie von *Weissinger* recht befriedigend ist. Die Theorie von *Multhopp* liefert in allen Fällen zu hohe Werte. Die zum Vergleich noch herangezogenen Ergebnisse der Kraftmessungen, die aus unserer 1. Mitteilung entnommen sind, zeigen geringe Unterschiede gegenüber den Druckverteilungsmessungen. Dies kann wohl darauf zurückgeführt werden, daß der Verlauf der Momentenkurven

nicht ganz geradlinig ist und daher die Ableitung eine gewisse Unsicherheit aufweist. Weiter sind noch die Werte für konstante $c_{n\,\text{örtl}}$-Verteilung und für den häufig benützten Mittel-

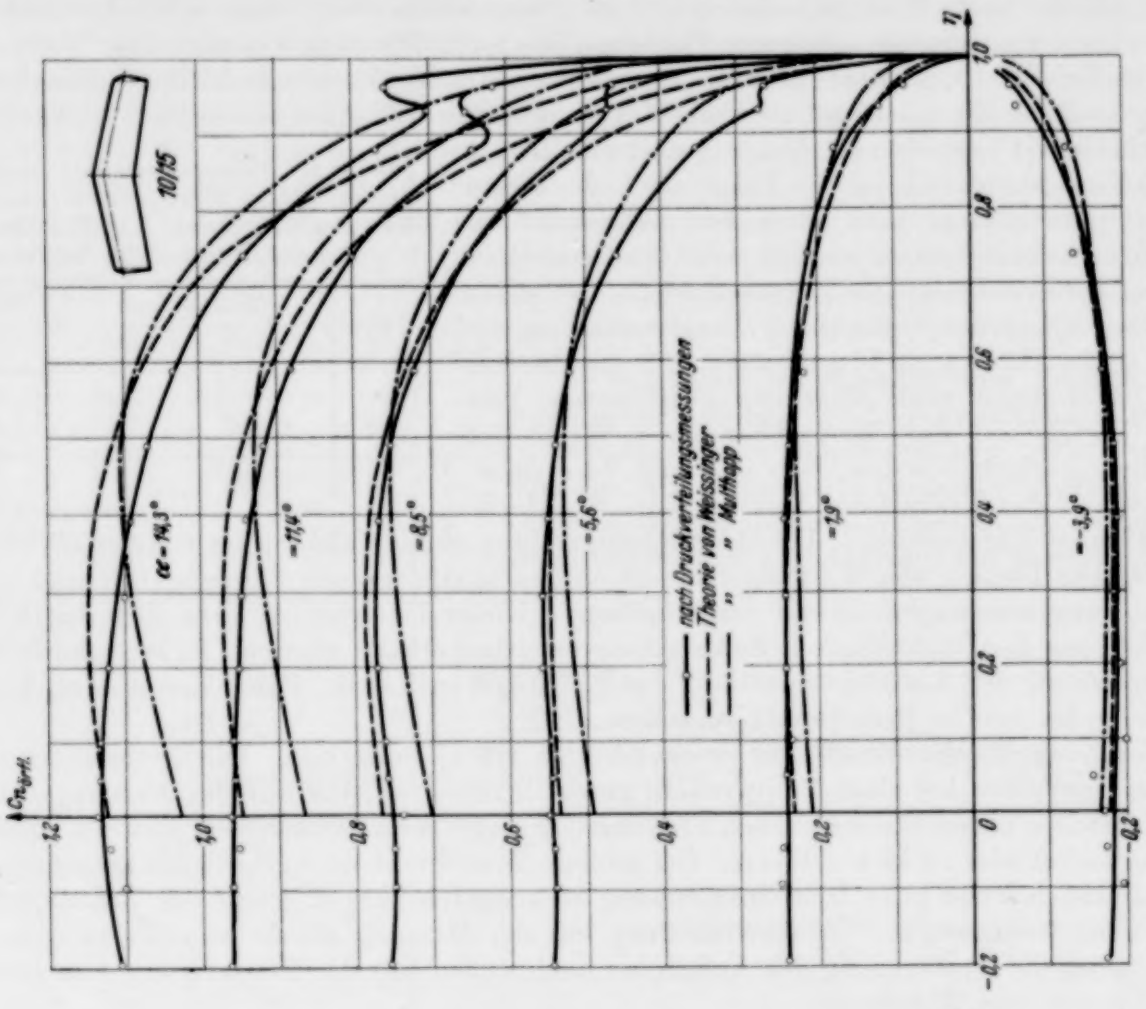


Abb. 15. Auftriebsverteilungen am Pfeilflügel 10/15 für verschiedene Anstellwinkel bei symmetrischer Anströmung. Vergleich von Theorie und Messung.

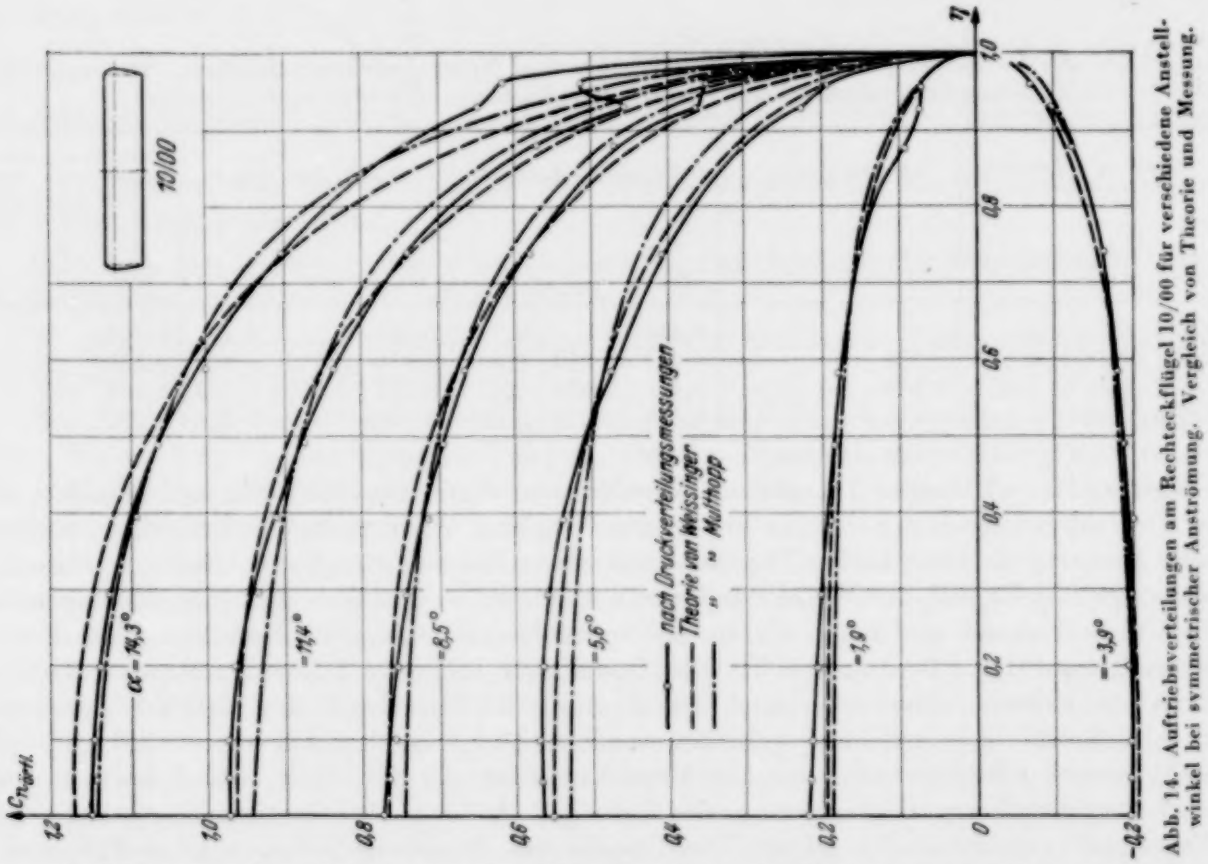


Abb. 14. Auftriebsverteilungen am Rechteckflügel 10/00 für verschiedene Anstellwinkel bei symmetrischer Anströmung. Vergleich von Theorie und Messung.

wert zwischen rechteckiger und elliptischer Auftriebsverteilung hinzugenommen. Im ersten Falle ergeben sich stets zu große Werte für den Lastschwerpunkt, im zweiten Fall folgen für kleine Pfeilwinkel etwas zu große und für große Pfeilwinkel etwas zu kleine Werte.

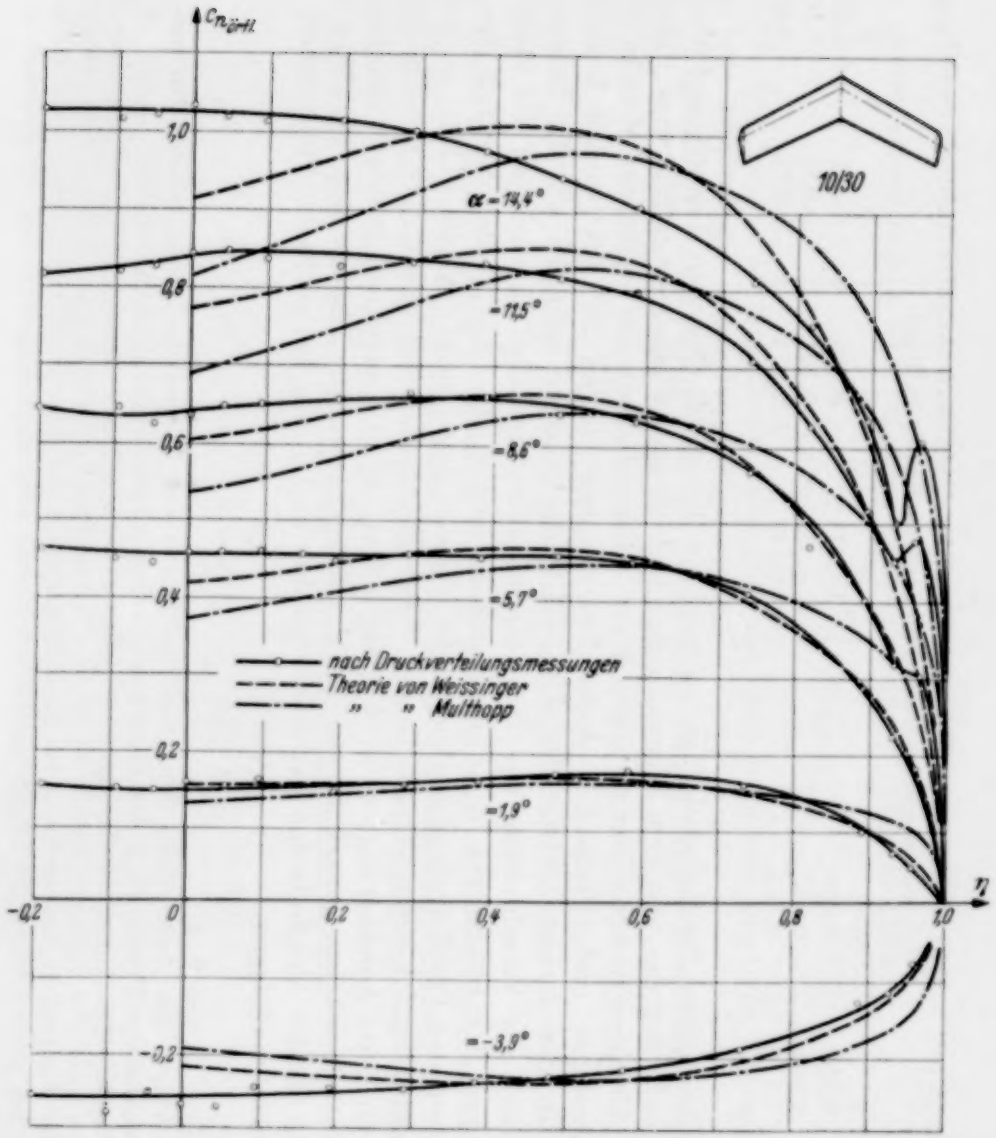


Abb. 16. Auftriebsverteilungen am Pfeilflügel 10/30 für verschiedene Anstellwinkel bei symmetrischer Anströmung. Vergleich von Theorie und Messung.

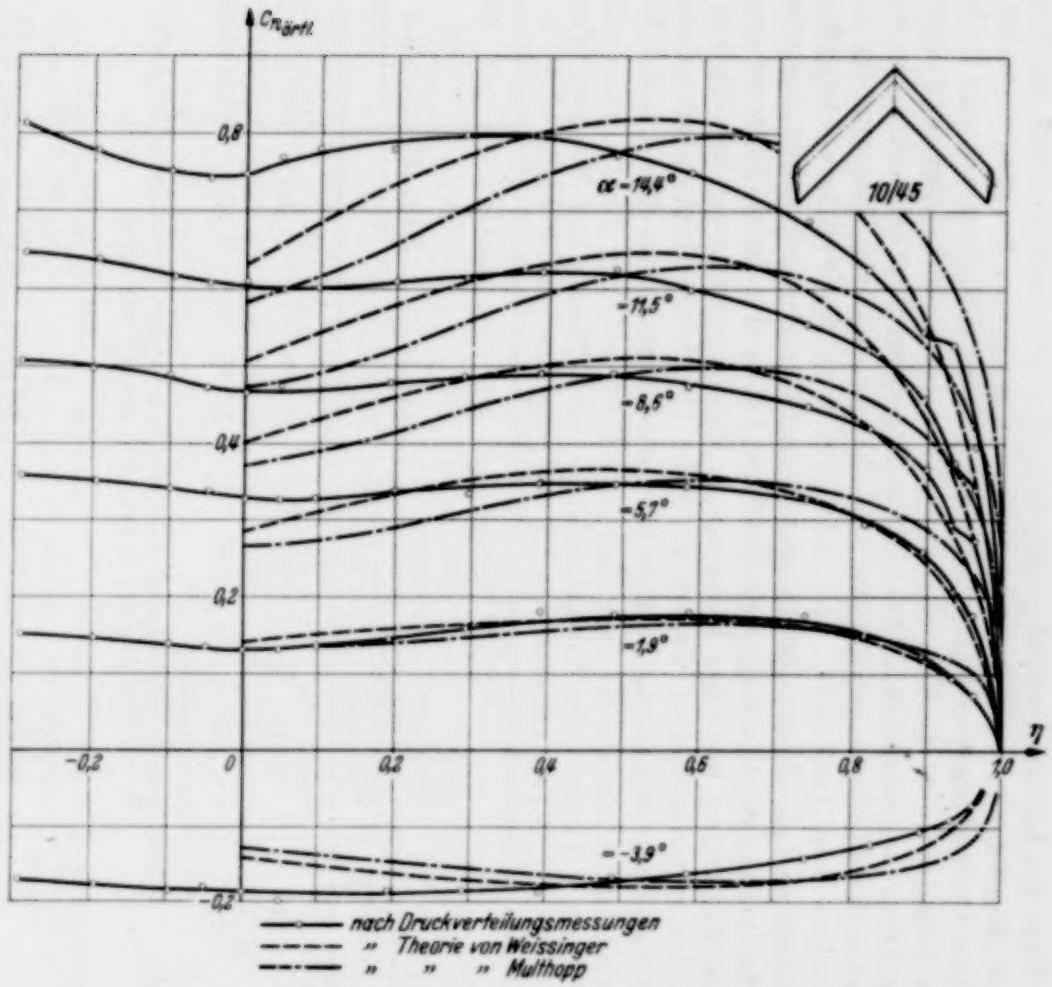


Abb. 17. Auftriebsverteilungen am Pfeilflügel 10/45 für verschiedene Anstellwinkel bei symmetrischer Anströmung. Vergleich von Theorie und Messung.

Aus der Lage des Lastschwerpunktes können wir jetzt sofort die Lage des Neutralpunktes berechnen. Die Ergebnisse für die verschiedenen theoretischen Auftriebsverteilungen sind in Tabelle 3 den Druckverteilungsmessungen gegenübergestellt. Der Neutralpunkt ist hierbei gerechnet von $l/4$ in Flügelmitte nach Abb. 12. Zunächst ist als einfachster Fall wieder konstante $c_{n\,\text{örtl}}$-Verteilung angenommen. Die hieraus folgenden Neutralpunktlagen sind identisch mit den Rücklagen der Flächenschwerpunkte. Als häufig benützte Näherung ist auch der Mittelwert zwischen rechteckiger und elliptischer Auftriebsverteilung herangezogen worden. Weiter sind die Neutralpunktlagen aufgeführt, die sich unter Zugrundelegung der gemessenen Auftriebsverteilung des Rechteckflügels durch Umrechnung auf Pfeilflügel ergeben. Die Ergebnisse nach der Theorie von *Multhopp* und nach der Theorie von *Weissinger* sind neben den experimentellen Werten nach der Druckverteilungsmessung und Kraftmessung ebenfalls in Tabelle 3 enthalten. Fordert man eine Genauigkeit von 1% der Flügeltiefe für die

Tabelle 3. *Vergleich der Neutralpunktlagen nach Theorie und Messung. Werte x_N/l (x_N gerechnet von $l/4$ in Flügelmitte nach Abb. 12).*

		Rechnung					Messung	
	$\varphi°$	(1) konst. $c_{n\,\text{örtl}}$-Verteilung	(2) Mittelwert von rechteckiger und elliptischer Verteilung	(3) umgerechnet mit der gemessenen Verteilung des Rechteckflügels	(4) nach Theorie *Multhopp*[2]	(5) nach Theorie *Weissinger*[1]	(6) nach Kraftmessung	(7) nach Druckverteilungsmessung
I	0	0	0	0	0	0	0	0
	15	0,335	0,310	0,304	0,319	0,309	0,315	0,310
	30	0,722	0,669	0,657	0,709	0,678	0,690	0,683
	45	1,250	1,158	1,136	1,279	1,210	1,210	1,215
		Werte $\Delta x_N/l = \text{I} - \text{I}_{(1)}$: = Neutralpunktverschiebung infolge Abweichung der Auftriebsverteilung von der konstanten $c_{n\,\text{örtl}}$-Verteilung.						
II	0		0	0	0	0	0	0
	15		−0,025	−0,031	−0,016	−0,026	−0,020	−0,025
	30		−0,053	−0,065	−0,013	−0,044	−0,031	−0,039
	45		−0,092	−0,114	+0,029	−0,040	−0,040	−0,035
		Werte $\Delta x_N/l = \text{I} - \text{I}_{(3)}$: = Neutralpunktverschiebung infolge Abweichung der Auftriebsverteilung von derjenigen des ungepfeilten Rechteckflügels.						
III	0	0	0		0	0	0	0
	15	0,031	0,006		0,015	0,005	0,011	0,006
	30	0,065	0,012		0,052	0,021	0,033	0,026
	45	0,114	0,022		0,143	0,074	0,074	0,079

Vorausberechnung der Neutralpunktlage, so zeigt der Vergleich zwischen Theorie und Messung, daß diese Forderung nur von dem Berechnungsverfahren von *Weissinger* erfüllt wird. Das Verfahren von *Multhopp* liefert schon zu große Werte. Erfreulicherweise ergibt der Mittelwert zwischen rechteckiger und elliptischer Auftriebsverteilung bis zu 30° Pfeilwinkel brauchbare Werte, die in den meisten Fällen für Überschlagsrechnungen ausreichen[3]. In Tabelle 3 II ist weiter noch die Verschiebung des Neutralpunktes infolge der Abweichung der Auftriebsverteilung von der konstanten $c_{a\,\text{örtl}}$-Verteilung enthalten (I — I, 1). Den Einfluß der Auftriebsänderung des Pfeilflügels gegenüber dem Recheckflügel zeigt Tabelle 3III (I — I, 3).

Zusammenfassend können wir auf Grund dieser Ergebnisse feststellen, daß die Theorie von *Weissinger* die beste Annäherung an die Messung liefert. Die Unterschiede bewegen sich hinsichtlich der Neutralpunktlage innerhalb von 1% der Flügeltiefe. Die Theorie von *Multhopp* liefert große Werte für die Abstände der Lastschwerpunkte und damit bei größeren Pfeilwinkeln auch für die Neutralpunktlagen.

[1] Vgl. Note 10 von S. 45.

[2] *H. Multhopp*, Die Anwendung der Tragflügeltheorie auf Fragen der Flugmechanik bei unsymmetrischer Anströmung. Bericht S. 2 der Lilienthalgesellschaft für Luftf.-Forschg. 1939.

[3] Daß der Mittelwert von rechteckiger und elliptischer Auftriebsverteilung trotz der großen Abweichungen beim Lastschwerpunkt (Tabelle 2) für den Neutralpunkt doch so gute Werte liefert, liegt daran, daß einerseits die großen Unterschiede im Lastschwerpunkt bei kleinen Pfeilwinkeln wenig ausmachen, andererseits bei großen Pfeilwinkeln der Lastschwerpunkt nahezu richtig ist.

b) Theoretische Näherung für die Berechnung der Auftriebsverteilung eines schiebenden Pfeilflügels. Bei unsymmetrischer Anströmung ist die Berechnung der Auftriebsverteilung bisher nur für den geraden Flügel möglich. Die Methode von *Weissinger* liefert hierfür recht brauchbare Ergebnisse[1]. Für die theoretische Berechnung der Auftriebsverteilung eines schiebenden Pfeilflügels liegt noch kein brauchbares Verfahren vor. Es soll im folgenden der Versuch einer näherungsweisen Ermittlung der Auftriebsverteilung eines schiebenden Pfeilflügels gemacht werden.

Wir gehen bei der Ableitung der Näherung aus von der Voraussetzung, daß jede der beiden Flügelhälften eines Pfeilflügels einen schiebenden Flügel darstellt, und daher die Anblasung auf beiden Hälften in eine wirkungslose Tangentialkomponente und eine wirksame Normalkomponente zerlegt werden kann.

Bezeichnen wir die Grundgeschwindigkeit mit V_0 und die wirksame Normalgeschwindigkeit mit V_n, so gilt für einen Flügel mit dem Pfeilwinkel φ (Abb. 18) für den Schiebewinkel $\beta = 0°$

$$V_n = V_0 \cos\beta .$$

Betrachten wir jetzt einen schiebenden Pfeilflügel, so erhalten wir für die Normalkomponenten der beiden Flügelhälften

Vorgehende Flügelhälfte: $V_n = V_0 \cos(\varphi - \beta)$,
Zurückgehende „ : $V_n = V_0 \cos(\varphi + \beta)$.

Als Verhältnis der Änderung der wirksamen Anblasgeschwindigkeit, herrührend vom Schieben, gegenüber der Normalkomponente bei $\beta = 0$ folgt für die vorgehende Flügelhälfte

$$\frac{V_n - (V_n)_{\beta=0}}{(V_n)_{\beta=0}} = \frac{\Delta V_n}{(V_n)_{\beta=0}} = \frac{V_0 \cos(\varphi - \beta) - V_0 \cos\varphi}{V_0 \cos\varphi} = \frac{\cos(\varphi - \beta)}{\cos\varphi} - 1$$

oder entwickelt nach kleinen Werten von β

$$\frac{\Delta V_n}{(V_n)_{\beta=0}} = -\frac{\beta^2}{2} + \beta \operatorname{tg}\varphi . \tag{5a}$$

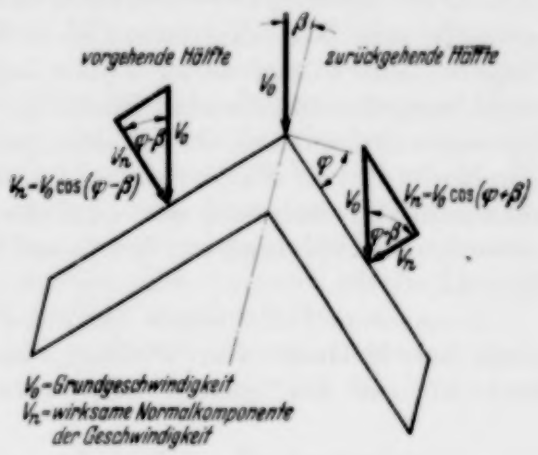


Abb. 18. Skizze zur Bestimmung der wirksamen Anblasgeschwindigkeit am schiebenden Pfeilflügel.

Ganz entsprechend ergibt sich für die zurückgehende Flügelhälfte:

$$\frac{\Delta V_n}{(V_n)_{\beta=0}} = \frac{\beta^2}{2} - \beta \operatorname{tg}\varphi . \tag{5b}$$

Die Änderung der wirksamen Normalkomponente kann man nun in erster Näherung ersetzen durch eine äquivalente Anstellwinkeländerung.

Die *Prandtl*sche Integralgleichung als Ausgangsgleichung für die Berechnung der Auftriebsverteilung des geraden Flügels lautet im allgemeinen Fall:

$$\frac{1}{4\pi V_0} \int_{-b/2}^{+b/2} \frac{d\Gamma(y)}{dy'} \frac{dy'}{y - y'} + \frac{2\Gamma(y)}{c'_{a\infty} V_0 l(y)} = \alpha_g(y) . \tag{6}$$

Diese Gleichung gilt streng genommen nur für gleichmäßige Anströmungsgeschwindigkeit V_0 längs der ganzen Spannweite; man kann jedoch auch noch bei schwach inhomogenen Strömungen mit ihr rechnen, wie *Bausch*[2] gezeigt hat. Dies wurde auch durch spätere theoretische und experimentelle Untersuchungen bestätigt[3].

Nehmen wir also V als veränderlich an längs der Spannweite, so gilt

$$\frac{1}{4\pi V(y)} \int_{-b/2}^{+b/2} \frac{d\Gamma(y)}{dy'} \frac{dy'}{y - y'} + \frac{2\Gamma(y)}{c'_{a\infty} V(y) l(y)} = \alpha_g(y)$$

---

[1] *W. Jacobs*, Sechskomponentenmessungen an drei Pfeilflügeln. Forsch.-Ber. der Zentrale für wissenschaftl. Berichtswesen. Berlin-Adlershof, F. B. 1629 (1942). Bibliography of Technical Reports. Washington P. B. 36166.

[2] *K. Bausch*, Luftf.-Forschg. 16 (1939), S. 29.

[3] *H. Schlichting* und *W. Jacobs*, Jb. 1940 dtsch. Luftf.-Forschg., S. I 81.

oder

$$\frac{1}{4\pi V_0}\int_{-b/2}^{+b/2}\frac{dI'(y)}{dy'}\frac{dy'}{y-y'}+\frac{2\,I'(y)}{c'_{a\infty}V_0\,l\,(y)}=\alpha_g\frac{V(y)}{V_0}=\alpha_g(y)\left(1+\frac{\Delta V}{V_0}\right). \tag{7}$$

Es wird also die Auftriebsverteilung eines Flügels mit der geometrischen Anstellwinkelverteilung $\alpha_g(y)$ in einer inhomogenen Geschwindigkeitsverteilung gleichgesetzt einer Auftriebsverteilung desselben Flügels in homogener Strömung mit der geometrischen Anstellwinkelverteilung $\alpha_g(y)\cdot(1+\Delta V/V_0)$. Diesen Winkel nennen wir den „äquivalenten geometrischen Anstellwinkel". Die Größe $\alpha_g\Delta V/V_0$ können wir als eine zusätzliche äquivalente geometrische Verwindung ansehen. Analog können wir die Auftriebsverteilung erhalten durch Überlagerung der Grundauftriebsverteilung und der infolge der äquivalenten Verwindung erzeugten Auftriebsverteilung.

Zur Berechnung der Auftriebsverteilung eines schiebenden Pfeilflügels setzen wir jetzt für $\Delta V/V_0$ die Zusatzgeschwindigkeit $\Delta V_n/V_{n_{\beta=0}}$ an der vorgehenden bzw. zurückgehenden Flügelhälfte ein. Wir erhalten auf diese Weise eine „äquivalente Verwindung" des schiebenden Pfeilflügels. Auf Grund dieser äquivalenten Verwindung läßt sich dann die zusätzliche Auftriebsverteilung des schiebenden Pfeilflügels bestimmen, z. B. nach der Methode von *Multhopp*. Eine Verfeinerung würden wir erhalten, wenn die Auftriebsverteilung für die obige Verwindung nach der Methode von *Weissinger* für Pfeilflügel berechnet wird, da der Zusammenhang zwischen Geschwindigkeitsänderung und äquivalentem Anstellwinkel derselbe bleibt. Die gesamte Auftriebsverteilung würde dann aus der Grundauftriebsverteilung und der zusätzlichen Auftriebsverteilung folgen.

In unserem Falle wurde für die Pfeilflügel nur die zusätzliche Auftriebsverteilung nach der einfachen Methode von *Multhopp* berechnet. Berücksichtigt wurden in den Gleichungen (5a) und (5b) nur die linearen Glieder in β. Es wurde also gerechnet mit

$$\frac{\Delta V_n}{(V_n)_{\beta=0}}=\pm\beta\,\mathrm{tg}\,\varphi\,. \tag{8}$$

Der Vergleich mit den Messungen ist in Abb. 10 u 11 enthalten. Es ergibt sich im großen und ganzen eine recht brauchbare Näherung. Bei großen Anstellwinkeln treten am rückgehenden Flügel stärkere Abweichungen auf, während die vorgehende Flügelhälfte immer noch gute Übereinstimmung zeigt. Inwieweit die Ergebnisse auch für andere Flügelformen zutreffen, läßt sich nicht mit Sicherheit sagen; aber es ist zu erwarten, daß die Übereinstimmung ähnlich sein wird.

6. Zusammenfassung. Es wird über Druckverteilungsmessungen an Pfeilflügeln konstanter Tiefe mit den Pfeilungen $\varphi = 0$, 15, 30 und 45° bei symmetrischer und unsymmetrischer Anströmung berichtet. Hieraus werden die Auftriebsverteilungen am Flügel und die zusätzlichen von der Pfeilung herrührenden Auftriebsänderungen ermittelt.

Die Auftriebsverteilungen bei $\beta = 0$ und die hiermit gewonnenen Neutralpunktlagen werden mit theoretischen Rechnungen verglichen. Es ergibt das Verfahren von *Weissinger* eine recht gute Übereinstimmung mit der Messung. Die Unterschiede zwischen den gemessenen und nach diesem Verfahren gerechneten Neutralpunktlagen sind etwa 1% der Flügeltiefe.

Für die Berechnung der Auftriebsverteilung an einem schiebenden Pfeilflügel wird ein Näherungsverfahren angegeben, das beim Vergleich mit der Messung recht brauchbare Ergebnisse liefert.

(Eingegangen am 16. August 1950.)

Anschrift des Verfassers: Dr. habil. *W. Jacobs*, Stockholm (Schweden), Flygtekniska försöksanstalten, Ulvsunda.

Ein Integrationsverfahren für die Berechnung der Biegespannungen achsensymmetrischer Schalen unter achsensymmetrischer Belastung*.

I. Mitteilung.

Von H. Münz.

1. Einleitung. In der *Reißner-Meißner*schen Theorie der achsensymmetrischen Schalen unter achsensymmetrischer Belastung erfordert die Berechnung der Biegespannungen die Kenntnis der allgemeinen Lösung einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung vierter Ordnung. *H. Reißner*[1] hat erstmalig bei der Berechnung der Kugelschale konstanter Wandstärke erkannt, daß sich die schwer zu überblickende Fülle von Gleichungen dieses Elastizitätsproblems übersichtlich zusammenfassen läßt in zwei gekoppelte, lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die Querkraft und die Verdrehung der Meridiantangente. *E. Meißner*[2] gelang es dann, auch für Schalen beliebiger Meridiankrümmung und veränderlicher Schalendicke entsprechende Differentialgleichungen aufzustellen, die in Sonderfällen durch eine komplexe Differentialgleichung zweiter Ordnung ersetzt werden können. *F. Tölke*[3] hat später gezeigt, daß bei gewissen, mit der Theorie verträglichen Vernachlässigungen, das Integrationsproblem immer auf die Lösung einer komplexen Differentialgleichung zweiter Ordnung hingeführt werden kann.

Im allgemeinen Fall müssen diese Differentialgleichungen natürlich schrittweise numerisch integriert werden. Für die *Reißner-Meißner*schen Differentialgleichungen hat *W. Lohmann*[4] ein solches Integrationsverfahren entwickelt.

Eine Schalenrechnung erfordert gewöhnlich einen sehr erheblichen Rechenaufwand. Im Bestreben, diesen Aufwand auf ein Minimum herabzudrücken, wird man sich die Frage stellen, ob sich die von *Reißner-Meißner* und *Tölke* aufgestellten Differentialgleichungen als die für eine numerische Rechnung am besten geeignete Formulierung des Schalenproblems darbieten. Die Koeffizienten dieser Differentialgleichungen sind sehr verwickelt gebaut, enthalten erste und zweite Ableitungen der Meridianform und der Schalendicke und sind, wie die Differentialgleichungen selbst, durch eine Reihe von Differentiations- und Eliminationsprozessen entstanden, deren mechanischer Sinn wohl kaum noch durchschaubar sein dürfte.

Der Versuch, ein der Rechnung besser angepaßtes Gleichungssystem aufzufinden, gab den Anstoß zu dieser Arbeit. Der Leitfaden, der uns hierbei durch die *Reißner-Meißner*sche Theorie führen wird, ist die Variationsrechnung und die Integrationstheorie der kanonischen Differentialgleichungen, wie sie in der analytischen Mechanik von *Lagrange*, *Jacobi* und *Poincaré* entwickelt worden ist. Die beste Orientierung über diese Methoden bietet der Enzyclopädieartikel von *G. Prange*[5]. *Prange* selbst hat in seiner Habilitationsschrift[6] die Theorie der kanonischen Systeme auf das Fachwerk und den elastischen Körper angewendet und in einer besonderen Arbeit[7] auf den Balken. *Prange* zeigt die engen Analogien auf, die zwischen den Variationsproblemen der analytischen Mechanik und denen der Festigkeitslehre bestehen. Neuerdings hat *W. Günther*[8] diese Verfahren der Variationsrechnung für die Kreisringplatte nutzbar gemacht.

2. Die Grundgleichungen der Schalentheorie. Wir wollen vorweg die Grundgleichungen der *Reißner-Meißner*schen Schalentheorie zusammenstellen. Dies kann in aller Kürze geschehen,

---

* Dissertation Braunschweig 1950 (Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. *H. Schaefer*, Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. *O. Föppl*).

[1] *H. Reißner*, Müller-Breslau-Festschrift 1912 S. 181, Leipzig 1912.

[2] *E. Meißner*, Physik. Z. 14 (1913) S. 343.

[3] *F. Tölke*, Ing.-Arch. 9 (1938) S. 282.

[4] *W. Lohmann*, Ing.-Arch. 6 (1935) S. 338. Vgl. auch *R. Grammel*, Ing.-Arch. 10 (1939) S. 407.

[5] *G. Prange*, Enzyclopädie der math. Wissensch., IV. 2; S. 505.

[6] *G. Prange*, Das Extremum der Formänderungsarbeit, Habilitationsschrift Hannover 1916, unveröffentlicht.

[7] *G. Prange*, Die Theorie des Balkens in der technischen Elastizitätslehre. Z. Arch. Ing.-Wesen 65, N. F. 24 (1919) S. 83—96, 121—150.

[8] *W. Günther*, Die Biegung kreissymmetrischer Ringplatten veränderlicher Dicke als Problem der Variationsrechnung. Dissertation Braunschweig 1946.

da ausführlichere und sehr übersichtliche Darstellungen in den bekannten Büchern von *W. Flügge*[1] und *Biezeno-Grammel*[2] zu finden sind.

Das Element einer achsensymmetrischen Schale ist begrenzt durch zwei benachbarte Meridianschnitte und zwei benachbarte Breitenkreisschnitte (Abb. 1 und 2). Die Schalendicke ist nach Voraussetzung der Biegetheorie dünner Schalen klein gegen alle anderen geometrischen Abmessungen der Schale, insbesondere klein gegen die beiden Hauptkrümmungshalbmesser der Schalenmittelfläche, so daß die Betrachtung der Schalenmittelfläche für die Angabe der geometrischen Daten und der Beziehungen zwischen den Verformungen und Verschiebungen ausreicht. Die Schnittkräfte und -momente werden ohnehin auf den Mittelpunkt jeder Schnittfläche bezogen.

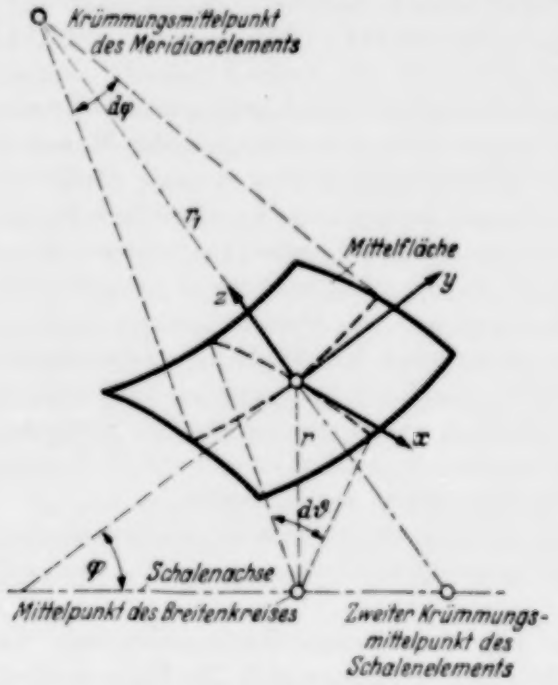


Abb. 1. Geometrische Daten.

φ = Winkel zwischen Meridiantangente und Schalenachse.
r_1 = Krümmungsradius des Meridians.
$r_1 d\varphi$ = Bogenelement des Meridians.
r = Radius eines Breitenkreises.
$r\,d\vartheta$ = Bogenelement des Breitenkreises.
x, y, z = Achsen eines rechtshändigen, kartesischen Koordinatensystems, und zwar
x-Achse in Richtung der Breitenkreistangente,
y-Achse in Richtung der Meridiantangente,
z-Achse in Richtung der Normalen der Schalenmittelfläche.

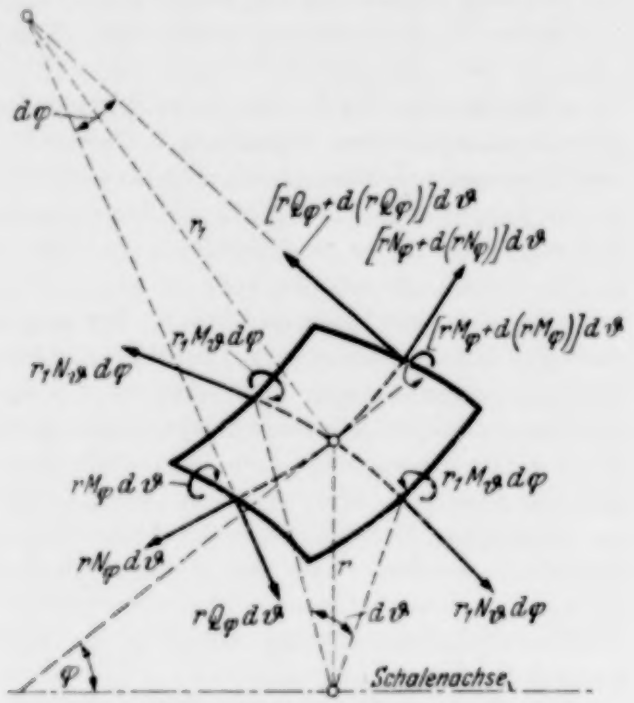


Abb. 2. Schnittkräfte und -momente.

N_φ = Längskraft (in Richtung der Meridiantangente).
Q_φ = Querkraft (in Richtung der Normalen der Schalenmittelfläche).
N_ϑ = Ringkraft (in Richtung der Breitenkreistangente).
M_φ = Biegemoment (um die Breitenkreistangente).
M_ϑ = Ringmoment (um die Meridiantangente).

Es seien σ_φ und σ_ϑ die Normalspannungen (Zug positiv, Druck negativ), die am Breitenkreisschnitt bzw. Meridianschnitt angreifen. Wegen der Achsensymmetrie von Schale und Belastung treten nur am Breitenkreisschnitt Schubspannungen τ auf. Die Spannungen σ_z normal zur Mittelfläche seien im Vergleich zu den anderen Spannungen so klein, daß wir sie und ihren Einfluß auf die Formänderungen vernachlässigen können. Die aus den Spannungen resultierenden Schnittkräfte und -momente werden je Längeneinheit des zugehörigen Bogenelementes der Schalenmittelfläche angegeben. Es folgt, wenn $z = \pm h$ die äußere bzw. innere Schalenlaibung bedeutet,

$$N_\varphi = \int_{-h}^{+h} \sigma_\varphi \left(1 + \frac{z \cos\varphi}{r}\right) dz\,, \tag{1}$$

$$M_\varphi = -\int_{-h}^{+h} \sigma_\varphi \left(1 + \frac{z \cos\varphi}{r}\right) z\,dz\,, \tag{2}$$

$$Q_\varphi = \int_{-h}^{+h} \tau \left(1 + \frac{z \cos\varphi}{r}\right) dz\,, \tag{3}$$

[1] *W. Flügge*, Statik und Dynamik der Schalen. Berlin 1934.
[2] *Biezeno-Grammel*, Technische Dynamik, S. 450. Berlin 1939.

$$N_\vartheta = \int_{-h}^{+h} \sigma_\vartheta \left(1 - \frac{z}{r_1}\right) dz\,, \tag{4}$$

$$M_\vartheta = -\int_{-h}^{+h} \sigma_\vartheta \left(1 - \frac{z}{r_1}\right) z\,dz\,. \tag{5}$$

Die Krümmungshalbmesser r und r_1 sind nach Voraussetzung sehr viel größer als die Schalendicke $2h$, so daß die Änderung von r_1 und r mit z zwischen den Schalenlaibungen vernachlässigbar ist. In die Integrale (1) bis (5) werden daher für r_1 und r die Werte der Schalenmittelfläche eingesetzt. Für die Normalspannungen nehmen wir eine lineare Abhängigkeit von z an (Abb. 3). Mit $\sigma_h - \sigma_0 = \sigma_1$ ist

$$\sigma(z) = \sigma_0 + \frac{\sigma_1}{h}\, z\,. \tag{6}$$

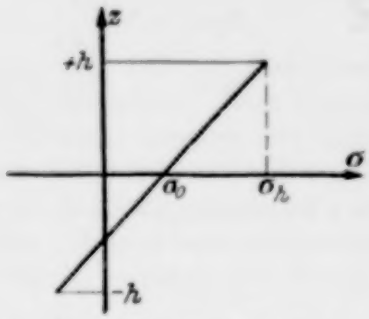


Abb. 3. Verteilung der Normalspannung über die Schalendicke.

Aus (1), (2), (4), (5) folgt mit (6)

$$N_\varphi = 2h\left(\sigma_{\varphi 0} + \frac{h\cos\varphi}{3r}\sigma_{\varphi 1}\right), \qquad M_\varphi = -\frac{2}{3}h^2\left(\sigma_{\varphi 1} + \frac{h\cos\varphi}{r}\sigma_{\varphi 0}\right),$$

$$N_\vartheta = 2h\left(\sigma_{\vartheta 0} - \frac{h}{3r_1}\sigma_{\vartheta 1}\right), \qquad M_\vartheta = -\frac{2}{3}h^2\left(\sigma_{\vartheta 1} - \frac{h}{r_1}\sigma_{\vartheta 0}\right).$$

Aus diesen Gleichungen werden die an der äußeren und inneren Schalenlaibung auftretenden Normalspannungen berechnet. Da $h \ll r_1$ und r ist, wird

$$\sigma_{\varphi\,;\,h} = \frac{1}{2h}\left(N_\varphi \mp 3\frac{M_\varphi}{h}\right), \tag{7}$$

$$\sigma_{\vartheta\,;\,h} = \frac{1}{2h}\left(N_\vartheta \mp 3\frac{M_\vartheta}{h}\right). \tag{8}$$

Die Gleichgewichtsbedingungen am Schalenelement lauten (Abb. 2)

$$\frac{d}{d\varphi}(r N_\varphi) - r Q_\varphi - r_1 N_\vartheta \sin\varphi = -r r_1 Y, \tag{9}$$

$$r N_\varphi + \frac{d}{d\varphi}(r Q_\varphi) - r_1 N_\vartheta \cos\varphi = -r r_1 Z, \tag{10}$$

$$\frac{d}{d\varphi}(r M_\varphi) - r_1 M_\vartheta \sin\varphi + r r_1 Q_\varphi = 0\,. \tag{11}$$

Dabei sind Y und Z die auf das Schalenelement einwirkenden äußeren Kräfte in Richtung der Meridiantangente bzw. der Normalen der Schalenmittelfläche (Dimension Kraft/Fläche).

Für die vorliegende Theorie werden die auftretenden Verformungen und Verschiebungen als infinitesimal angenommen. Der Formänderungszustand dünner Schalen wird durch die Verformung der Schalenmittelfläche angegeben. Außerdem sei vorausgesetzt, daß die Normale der Schalenmittelfläche auch nach der Verformung noch normal zur neuen Schalenmittelfläche ist. Diese Bedingung ist nur dann erfüllt, wenn wir keine Querkraftverformungen zulassen. Dieses setzt wiederum nur die Betrachtung dünner Schalen voraus. Die Verschiebungen v und w (Abb. 4) sind positiv in Richtung der positiven y, z-Achsen; die Tangentenverdrehung χ ist positiv, wenn sie, in Richtung der positiven x-Achse gesehen, im Uhrzeigersinn erfolgt.

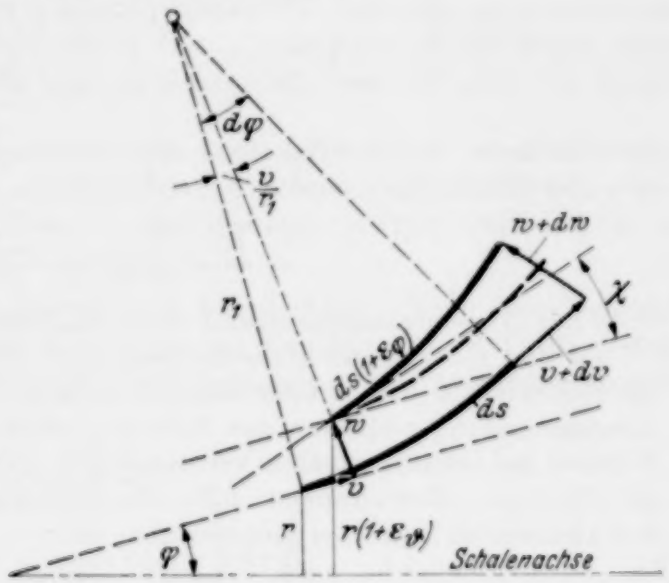


Abb. 4. Die Verschiebungen und Verformungen.
v = Verschiebung i Richtung der Meridiantangente.
w = Verschiebung in Richtung der Normalen der Schalenmittelfläche.
χ = Verdrehung der Meridiantangente.
$ds = r_1\,d\varphi$ = Bogenelement des Meridians.
ε_φ = Meridiandehnung.
ε_ϑ = Ringdehnung.

Die Beziehungen zwischen den Verformungen und Verschiebungen, die an Hand von Abb. 4 ermittelt werden könnten, sollen hier mit Hilfe der virtuellen Arbeiten der inneren und äußeren Kräfte hergeleitet werden. Die drei Gleichgewichtsbedingungen (9) bis (11) werden bzw. mit

den virtuellen Verrückungen $\lambda_1 = \delta v$, $\lambda_2 = \delta w$, $\lambda_3 = \delta \chi$ multipliziert, dann addiert und über eine Schalenzone integriert. Wir erhalten so für die gesamte virtuelle Arbeit der äußeren und inneren Kräfte die Gleichung

$$2\pi \int \Big\{ \lambda_1 \Big[-\frac{d\,(r N_\varphi)}{d\varphi} + r Q_\varphi + r_1 N_\vartheta \sin\varphi \Big] + \lambda_2 \Big[-r N_\varphi - \frac{d\,(r Q_\varphi)}{d\varphi} + r_1 N_\vartheta \cos\varphi \Big] + \\ + \lambda_3 \Big[-\frac{d\,(r M_\varphi)}{d\varphi} + r_1 M_\vartheta \sin\varphi - r r_1 Q_\varphi \Big] \Big\}\, d\varphi - 2\pi \int r r_1 (Y\lambda_1 + Z\lambda_2)\, d\varphi = 0 .$$

Werden die Glieder mit der ersten Ableitung nach φ einmal partiell integriert, so erscheint die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte in der Form

$$2\pi \int \Big\{ r N_\varphi \Big(\frac{d\lambda_1}{d\varphi} - \lambda_2 \Big) + r_1 N_\vartheta (\lambda_1 \sin\varphi + \lambda_2 \cos\varphi) + r Q_\varphi \Big(\lambda_1 + \frac{d\lambda_2}{d\varphi} - r_1 \lambda_3 \Big) + \\ + r M_\varphi \frac{d\lambda_3}{d\varphi} + r_1 M_\vartheta \lambda_3 \sin\varphi \Big\}\, d\varphi . \tag{12}$$

Die ausintegrierten Glieder geben die virtuelle Arbeit der Randkräfte an.

Wenn $\delta\varepsilon_\varphi$ und $\delta\varepsilon_\vartheta$ die virtuellen Verzerrungen des Meridianelementes bzw. des Breitenkreiselementes sind und $\delta\varkappa_\varphi$ und $\delta\varkappa_\vartheta$ die entsprechenden virtuellen Verkrümmungen, so ist die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte ohne Querkraftverformung

$$2\pi \int \{ N_\varphi \delta\varepsilon_\varphi + N_\vartheta \delta\varepsilon_\vartheta + M_\varphi \delta\varkappa_\varphi + M_\vartheta \delta\varkappa_\vartheta \}\, r r_1 d\varphi . \tag{13}$$

Vergleichen wir die beiden Formen der virtuellen Arbeit der inneren Kräfte (12) und (13) miteinander, so ergeben sich zwischen den virtuellen Verformungen und den virtuellen Verschiebungen Beziehungen, die auch für die wirklich auftretenden infinitesimalen Verformungen und Verschiebungen gelten:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{dv}{r_1 d\varphi} - \frac{w}{r_1} , \tag{14}$$

$$\varepsilon_\vartheta = \frac{v \sin\varphi + w \cos\varphi}{r} , \tag{15}$$

$$\varkappa_\varphi = \frac{d\chi}{r_1 d\varphi} , \tag{16}$$

$$\varkappa_\vartheta = \frac{\chi \sin\varphi}{r} , \tag{17}$$

und da keine Querkraftverformung auftritt, folgt eine geometrische Nebenbedingung zwischen den Verschiebungen und der Verdrehung:

$$F\Big(v, \frac{dw}{r_1 d\varphi}, \chi \Big) \equiv \frac{v}{r_1} + \frac{dw}{r_1 d\varphi} - \chi = 0 , \tag{18}$$

d. h. der Verschiebungszustand ist bereits durch zwei der drei Größen v, w, χ bestimmt.

Zu den Gleichgewichtsbedingungen (9) bis (11) und den hier abgeleiteten Beziehungen (14) bis (18) tritt für die 12 unbekannten Größen N_φ, N_ϑ, Q_φ; M_φ, M_ϑ; v, w, χ; ε_φ, ε_ϑ; $\varkappa_\varphi$, $\varkappa_\vartheta$ noch der Zusammenhang zwischen den Schnittgrößen und den Verformungen. Für homogene, isotrope Schalen bei infinitesimalen Verformungen gilt das *Hooke*sche Elastizitätsgesetz. Daraus ergeben sich folgende Beziehungen, falls die Abhängigkeit der Verformungen vom Abstand von der Schalenmittelfläche vernachlässigbar ist:

$$2\pi N_\varphi = D(\varepsilon_\varphi + \nu \varepsilon_\vartheta) , \tag{19}$$

$$2\pi N_\vartheta = D(\varepsilon_\vartheta + \nu \varepsilon_\varphi) , \tag{20}$$

$$2\pi M_\varphi = K(\varkappa_\varphi + \nu \varkappa_\vartheta) , \tag{21}$$

$$2\pi M_\vartheta = K(\varkappa_\vartheta + \nu \varkappa_\varphi) , \tag{22}$$

worin $D = 2\pi E \frac{2h}{1-\nu^2}$ die Dehnungssteifigkeit ist und $K = 2\pi E \frac{2h^3}{3(1-\nu^2)}$ die Biegesteifigkeit mit dem Elastizitätsmodul E, der Querkontraktionsziffer ν und der halben Schalendicke h.

3. Das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie. Die potentielle Energie der belasteten Schale ist

$$\Pi = 2\pi \int \Big\{ \frac{1}{2} [N_\varphi \varepsilon_\varphi + N_\vartheta \varepsilon_\vartheta + M_\varphi \varkappa_\varphi + M_\vartheta \varkappa_\vartheta]\, r r_1 d\varphi - \int (Yv + Zw)\, r r_1 d\varphi \Big\} ,$$

wenn wir zur Vereinfachung der Schreibweise von Randkräften und -momenten absehen (die Grenzen der Integrale sind durch die Begrenzung der Schalen durch zwei Breitenkreise gegeben). Hierin sind mit Hilfe des *Hooke*schen Gesetzes die Schnittkräfte und -momente durch die Verformungen auszudrücken und diese aus den Verformungs-Verschiebungs-Gleichungen durch die Verschiebungen, so daß die potentielle Energie schließlich in folgender Form erscheint:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int\Big\{D\Big[\Big(\frac{dv}{r_1 d\varphi}-\frac{w}{r_1}\Big)^2+2\nu\Big(\frac{dv}{r_1 d\varphi}-\frac{w}{r_1}\Big)\frac{v\sin\varphi+w\cos\varphi}{r}+\Big(\frac{v\sin\varphi+w\cos\varphi}{r}\Big)^2\Big]+$$
$$+K\Big[\Big(\frac{d\chi}{r_1 d\varphi}\Big)^2+2\nu\,\frac{d\chi}{r_1 d\varphi}\,\frac{\chi\sin\varphi}{r}+\Big(\frac{\chi\sin\varphi}{r}\Big)^2\Big]\Big\}\,r r_1\,d\varphi-2\pi\int(Yv+Zw)\,r r_1\,d\varphi\,.$$

Das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie fordert

$$\delta\Pi = 0\,.$$

Unter den möglichen Verschiebungszuständen ist derjenige herauszugreifen, der bei Beachtung der geometrischen Randbedingungen die potentielle Energie zum Minimum macht. Nun besteht zwischen den Verschiebungen v, w, χ die Gleichung (**2**, 18), die wir als Nebenbedingung mit einem *Lagrange*schen Faktor Λ versehen dem Integranden von Π hinzufügen wollen, um die drei Verschiebungen unabhängig voneinander variieren zu können. Die potentielle Energie erhalten wir somit in der Gestalt

$$\Pi = \int L\Big(v, w, \chi;\ \frac{dv}{d\varphi}, \frac{dw}{d\varphi}, \frac{d\chi}{d\varphi}\ ;\ \varphi, \Lambda\Big)\,d\varphi$$

mit

$$L = \frac{1}{2}\Big\{D\Big[\frac{r}{r_1}\Big(\frac{dv}{d\varphi}-w\Big)^2+2\nu\Big(\frac{dv}{d\varphi}-w\Big)(v\sin\varphi+w\cos\varphi)+\frac{r_1}{r}(v\sin\varphi+w\cos\varphi)^2\Big]+$$
$$+K\Big[\frac{r}{r_1}\Big(\frac{d\chi}{d\varphi}\Big)^2+2\nu\frac{d\chi}{d\varphi}\chi\sin\varphi+\frac{r_1}{r}(\chi\sin\varphi)^2\Big]\Big\}+2\pi\Lambda\Big(v+\frac{dw}{d\varphi}-r_1\chi\Big)-2\pi\,(Yv+Zw)\,r r_1\,. \qquad (1)$$

Die *Euler*schen Differentialgleichungen unseres Variationsproblems, die man bezüglich v, w und χ zu bilden hat, sind die Gleichgewichtsbedingungen, ausgedrückt in diesen Verschiebungsgrößen. Stellt man diese Gleichungen auf, so zeigt ein Vergleich mit (**2**, 2) und (**2**, 9) bis (**2**, 11), daß der *Lagrange*sche Faktor die Bedeutung rQ_φ hat. Dies war zu erwarten, da Λ die der geometrischen Nebenbedingung entsprechende Reaktionskraft ist. Diese Nebenbedingung (**2**, 18) folgte aber aus der Voraussetzung, daß eine Schubverformung ausgeschlossen ist, wodurch aber die Querkraft zu einer Reaktionskraft entartet.

Da diese drei *Euler*schen Gleichungen im folgenden nicht benötigt werden, verzichten wir auf ihre Wiedergabe, bemerken jedoch, daß man aus ihnen durch Elimination von Λ und χ bei Benutzung der Nebenbedingungen (**2**, 18) zwei Differentialgleichungen dritter Ordnung für v und w von allerdings sehr unübersichtlichem Aufbau erhalten kann.

4. Das kanonische Variationsproblem und die kanonischen Gleichungen. Nach dem Beispiel der analytischen Mechanik ersetzen wir nun in der „*Lagrange*schen Funktion" L (**3**, 1) die ersten Ableitungen der Verschiebungen nach der unabhängigen Veränderlichen φ durch die zugehörigen „Impulse":

$$p_v = \frac{\partial L}{\partial v'}\,,\qquad p_w = \frac{\partial L}{\partial w'}\,,\qquad p_\chi = \frac{\partial L}{\partial \chi'}\,,$$

$$p_v = D\Big[\frac{r}{r_1}(v'-w)+\nu(v\sin\varphi+w\cos\varphi)\Big] = 2\pi r N_\varphi\,, \qquad (1a)$$

$$p_w = 2\pi\Lambda \qquad = 2\pi r Q_\varphi\,, \qquad (1b)$$

$$p_\chi = K\Big[\frac{r}{r_1}\chi'+\nu\chi\sin\varphi\Big] \qquad = 2\pi r M_\varphi\,. \qquad (1c)$$

(Die Ableitung nach φ wird durch den Strich bezeichnet.) Durch eine *Legendre*sche Transformation wird die *Hamilton*sche Funktion eingeführt:

$$H(p_v, p_w, p_\chi\,;\ v, w, \chi;\ \varphi) = p_v v' + p_w w' + p_\chi \chi' - L(v', w', \chi'\,;\ v, w, \chi;\ \Lambda, \varphi)\,,$$ [1]

und das Variationsproblem vom Minimum der potentiellen Energie geht über in das kanonische

[1] Diejenigen Glieder von L, die in v', w', χ' linear sind, liefern keinen Beitrag zu H; w' tritt überhaupt nur linear in L auf.

Variationsproblem

$$\delta \int \{p_v v' + p_w w' + p_\chi \chi' - H\}\, d\varphi = 0\,. \tag{2a}$$

Jetzt werden die „Impulse" und Verschiebungen, die „Koordinaten" im Sinne der analytischen Mechanik, unabhängig voneinander variiert, und es ergeben sich daraus die kanonischen Gleichungen

$$p_v' = -\frac{\partial H}{\partial v}\,, \qquad v' = \frac{\partial H}{\partial p_v}\,,$$
$$p_w' = -\frac{\partial H}{\partial w}\,, \qquad w' = \frac{\partial H}{\partial p_w}\,,$$
$$p_\chi' = -\frac{\partial H}{\partial \chi}\,, \qquad \chi' = \frac{\partial H}{\partial p_\chi}\,.$$

Die *Hamilton*sche Funktion ist

$$\left.\begin{aligned} H = &- p_w v + p_v w + r_1 p_w \chi + \\ &+ \frac{1}{2}\frac{r_1}{r}\Big\{ D\left[\left(\frac{p_v}{D}\right)^2 - 2\nu\frac{p_v}{D}(v\sin\varphi + w\cos\varphi) - (1-\nu^2)(v\sin\varphi + w\cos\varphi)^2\right] + \\ &+ K\left[\left(\frac{p_\chi}{K}\right)^2 - 2\nu\frac{p_\chi}{K}\chi\sin\varphi - (1-\nu^2)\chi^2\sin^2\varphi\right]\Big\} + 2\pi r r_1 (Yv + Zw)\,, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

und demnach lauten die kanonischen Gleichungen

$$p_v' - \nu\frac{r_1}{r}p_v\sin\varphi = \quad p_w + D(1-\nu^2)\frac{r_1}{r}(v\sin\varphi + w\cos\varphi)\sin\varphi - 2\pi r r_1 Y\,, \tag{3a}$$

$$p_w' - \nu\frac{r_1}{r}p_v\cos\varphi = -\quad p_v + D(1-\nu^2)\frac{r_1}{r}(v\sin\varphi + w\cos\varphi)\cos\varphi - 2\pi r r_1 Z\,, \tag{3b}$$

$$p_\chi' - \nu\frac{r_1}{r}p_\chi\sin\varphi = -r_1 p_w + K(1-\nu^2)\frac{r_1}{r}\chi\sin^2\varphi\,, \tag{3c}$$

$$v' + \nu\frac{r_1}{r}v\sin\varphi = w\left(1 - \nu\frac{r_1}{r}\cos\varphi\right) + \frac{r_1}{r}\frac{p_v}{D}\,, \tag{3d}$$

$$w' = -v + r_1\chi\,, \tag{3e}$$

$$\chi' + \nu\frac{r_1}{r}\chi\sin\varphi = \frac{r_1}{r}\frac{p_\chi}{K}\,. \tag{3f}$$

Die kanonischen Gleichungen bilden ein System von sechs linearen Differentialgleichungen erster Ordnung für die Verschiebungen v, w, χ und die drei Impulse, die nach (1a) bis (1c) die an einem Breitenkreise angreifende Längskraft und Querkraft angeben und das zugehörige Biegemoment.

Die erste Gruppe der kanonischen Gleichungen (3a) bis (3c) würde man direkt aus den Gleichgewichtsbedingungen (**2**, 9) bis (**2**, 11) erhalten, wenn man die Ringkraft N_ϑ und das Ringmoment M_ϑ durch die Verschiebungen ausdrückt. Es ist nämlich

$$2\pi N_\vartheta = \nu\, 2\pi N_\varphi + D(1-\nu^2)\frac{v\sin\varphi + w\cos\varphi}{r}\,,$$

$$2\pi M_\vartheta = \nu\, 2\pi M_\varphi + K(1-\nu^2)\frac{\chi\sin\varphi}{r}\,.$$

Die Gleichungen (3d) und (3f) der zweiten Gruppe der kanonischen Gleichungen ergeben die Definitionen der Impulse p_v und p_χ nach (1a) und (1c) — das sind also die Beziehungen zwischen Längskraft N_φ und den Verschiebungen v und w bzw. zwischen dem Moment M_φ und der Verdrehung χ. Die kanonische Gleichung (3e) ist die Nebenbedingung zwischen den Verschiebungen (**2**, 18).

5. Reduktion des kanonischen Gleichungssystems mit Hilfe eines bekannten Integrals. Unter einem Integral des kanonischen Gleichungssystems (**4**, 3) versteht man einen Ausdruck von der Form $G(p_v, p_w, p_\chi; v, w, \chi; \varphi)$, der für jede Lösung $p_v(\varphi), \ldots v(\varphi), \ldots$ des kanonischen Systems unabhängig von φ, also konstant wird. Wie in der *Hamilton-Jacobi*schen Integrationstheorie der analytischen Mechanik gezeigt wird, lassen sich aus der Kenntnis eines Integrals Vorteile für die Integration eines kanonischen Systems gewinnen. Wäre z. B. ein Integral bekannt, das linear

in den Impulsen ist, also die Gestalt

$$a_1(v, w, \chi; \varphi) p_v + a_2(v, w, \chi; \varphi) p_w + a_3(v, w, \chi; \varphi) p_\chi + a_4(v, w, \chi; \varphi) = \text{konst.}$$

hat, so ließe sich unser kanonisches System von sechs linearen Differentialgleichungen erster Ordnung auf ein solches mit nur vier Differentialgleichungen reduzieren[1].

Ein Integral des vorliegenden kanonischen Systems läßt sich aber tatsächlich angeben. Wie man leicht sieht, erhält man bei der Elimination von N_ϑ aus den Gleichgewichtsbedingungen (**2**, 9) und (**2**, 10) die sofort integrierbare Gleichung

$$\frac{d}{d\varphi}\left[r N_\varphi \cos\varphi - r Q_\varphi \sin\varphi\right] = -\, r r_1 \left(Y \cos\varphi - Z \sin\varphi\right), \tag{1}$$

da auf der linken Seite die Ableitung der Komponente der resultierenden Schnittkraft in Richtung der Schalenachse steht und auf der rechten die Komponente der resultierenden Belastung in Richtung der Schalenachse. Daß dieses Integral angegeben werden kann, liegt darin begründet, daß bei einer Verformung der Schale die Verschiebung der Schalenpunkte in axialer Richtung immer von einer beliebigen Verschiebung der starren Schale in axialer Richtung überlagert werden darf.

Die erste Gruppe der kanonischen Gleichungen (**4**, 3) stellen die etwas umgeschriebenen Gleichgewichtsbedingungen dar. Es muß sich deshalb die der Gleichung (1) analoge Beziehung in den Impulsen ergeben, wenn (**4**, 3a) mit $\cos\varphi$ und (**4**, 3b) mit $\sin\varphi$ multipliziert werden und man beide voneinander abzieht:

$$\frac{d}{d\varphi}\left(p_v \cos\varphi - p_w \sin\varphi\right) = -\, 2\pi r r_1 \left(Y \cos\varphi - Z \sin\varphi\right). \tag{1a}$$

Wir führen als neuen Impuls die bei gegebener Belastung bekannte Funktion

$$p_1 = p_v \cos\varphi - p_w \sin\varphi \tag{2}$$

ein.

Damit man sich bei der Einführung neuer Impulse und Koordinaten nicht der Integrationsvorteile eines kanonischen Gleichungssystems begibt, muß das ursprüngliche Variationsproblem (**4**, 2a), wieder in ein kanonisches Variationsproblem übergehen; die Impulse p_v, p_w, p_χ und die Koordinaten v, w, χ müssen also durch eine „kanonische Transformation" in die neuen Impulse p_1, p_2, p_3 und die zugehörigen Koordinaten q_1, q_2, q_3 überführt werden. Die Bedingung hierfür ist, daß sich die Integranden des alten und des neuen Variationsproblems höchstens um ein totales Differential unterscheiden dürfen, da ein solches Zusatzglied die *Euler-Lagrange*schen Gleichungen nicht beeinflußt. Die „erzeugende Funktion" V der kanonischen Transformation ist hierbei eine zunächst beliebige Funktion der alten Impulse und der neuen Koordinaten, $V = V(p_v, p_w, p_\chi; q_1, q_2, q_3; \varphi)$, für die wir folgenden Zusammenhang mit den neuen Impulsen und den alten Koordinaten vorschreiben:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial V}{\partial q_1}, \qquad p_2 = \frac{\partial V}{\partial q_2}, \qquad p_3 = \frac{\partial V}{\partial q_3}, \\ v &= \frac{\partial V}{\partial p_v}, \qquad w = \frac{\partial V}{\partial p_w}, \qquad \chi = \frac{\partial V}{\partial p_\chi}. \end{aligned} \tag{3}$$

Der Zusammenhang der neuen *Hamilton*schen Funktion $H_1(p_1, p_2, p_3; q_1, q_2, q_3)$ mit H (**4**, 2) werde gegeben durch

$$H_1 = H - \frac{\partial V}{\partial \varphi}. \tag{4}$$

Der Integrand des neuen kanonischen Variationsproblems muß wieder die Gestalt haben

$$p_1 q_1' + p_2 q_2' + p_3 q_3' - H_1.$$

Unter Berücksichtigung der Transformationsgleichungen (3) und (4) läßt sich folgende Umrechnung angeben:

$$p_1 q_1' + p_2 q_2' + p_3 q_3' - H_1 = \frac{d}{d\varphi}\left[V - (v p_v + w p_w + \chi p_\chi)\right] + p_v v' + p_w w' + p_\chi \chi' - H.$$

[1] Zu diesem in der *Hamilton-Jacobischen* Integrationstheorie bekannten Satz vgl. *G. Prange*, Encyclopädie, S. 735.

Die Integranden des alten und des neuen kanonischen Variationsproblems unterscheiden sich also wie verlangt um ein totales Differential.

Da im vorliegenden Fall nach Gl. (2) und (3)

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = p_v \cos\varphi - p_w \sin\varphi$$

sein muß, wählen wir die „erzeugende Funktion" V zu

$$V = (p_v \cos\varphi - p_w \sin\varphi)\, q_1 + \left(p_v f_1(\varphi) + p_w f_2(\varphi)\right) q_2 + p_\chi q_3 \tag{5}$$

und erhalten aus den allgemeinen Gleichungen (3) der kanonischen Transformation

$$p_1 = p_v \cos\varphi - p_w \sin\varphi\,, \tag{6a}$$

$$p_2 = p_v f_1(\varphi) + p_w f_2(\varphi)\,, \tag{6b}$$

$$p_3 = p_\chi\,, \tag{6c}$$

$$v = q_1 \cos\varphi + q_2 f_1(\varphi)\,, \tag{7a}$$

$$w = -q_1 \sin\varphi + q_2 f_2(\varphi)\,. \tag{7b}$$

$$\chi = q_3\,. \tag{7c}$$

Hierbei sollen f_1 und f_2 zwei zunächst beliebige Funktionen von φ sein. Aus (7) ergeben sich die neuen Koordinaten zu

$$q_1 = \frac{v f_2 - w f_1}{f_2 \cos\varphi + f_1 \sin\varphi}\,, \tag{8a}$$

$$q_2 = \frac{v \sin\varphi + w \cos\varphi}{f_2 \cos\varphi + f_1 \sin\varphi}\,, \tag{8b}$$

$$q_3 = \chi\,. \tag{8c}$$

Die neue *Hamilton*sche Funktion ist

$$H_1 = H(p_v, p_w, p_\chi; v, w, \chi; \varphi) - \frac{\partial V(p_v, p_w, p_\chi, q_1, q_2, q_3; \varphi)}{\partial\varphi} \tag{9}$$

mit

$$\frac{\partial V}{\partial\varphi} = -(p_v \sin\varphi + p_w \cos\varphi)\, q_1 + \left(p_v f_1'(\varphi) + p_w f_2'(\varphi)\right) q_2 \tag{9a}$$

und H nach (4, 2). In (9) werden die ursprünglichen Koordinaten v, w, χ nach (7) durch die neuen q_1, q_2, q_3 ersetzt und die ursprünglichen Impulse p_v, p_w, p_χ durch die neuen p_1, p_2, p_3, indem man (6) nach p_v, p_w, p_χ auflöst:

$$p_v = \frac{p_1 f_2 + p_2 \sin\varphi}{f_2 \cos\varphi + f_1 \sin\varphi}\,, \tag{10a}$$

$$p_w = \frac{p_2 \cos\varphi - p_1 f_1}{f_2 \cos\varphi + f_1 \sin\varphi}\,, \tag{10b}$$

$$p_\chi = p_3\,. \tag{10c}$$

Der hier gemachte Ansatz (5) für die erzeugende Funktion V, für die lediglich die Gleichungen (2) und (3) vorgeschrieben sind, ist nicht der allgemeinste Ansatz, doch ist er wegen der vorhandenen Symmetrie zwischen den transformierten Größen sehr augenfällig. Offensichtlich wird die Transformation einfach, wenn die Koeffizientendeterminante

$$f_2(\varphi) \cos\varphi + f_1(\varphi) \sin\varphi = 1 \tag{11}$$

gesetzt wird. Aus dieser Bedingung folgt

$$q_2 = v \sin\varphi + w \cos\varphi\,,$$

d. h. q_2 ist unter der Bedingung (11) immer die aus v und w resultierende Verschiebung senkrecht zur Schalenachse. Um (11) zu erfüllen, sind drei Kombinationen von $f_1(\varphi)$ und $f_2(\varphi)$ sehr einfach zu übersehen, auf die wir uns beschränken wollen:

(a) $f_1(\varphi) = \sin\varphi\,, \qquad f_2(\varphi) = \cos\varphi\,,$

(b) $f_1(\varphi) = \dfrac{1}{\sin\varphi}\,, \qquad f_2(\varphi) = 0\,,$

(c) $f_1(\varphi) = 0\,, \qquad f_2(\varphi) = \dfrac{1}{\cos\varphi}\,.$

Zu (a): Nach (6) und (8) wird

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= p_v \cos\varphi - p_w \sin\varphi\,, & q_1 &= v\cos\varphi - w\sin\varphi\,,\\ p_2 &= p_v \sin\varphi + p_w \cos\varphi\,, & q_2 &= v\sin\varphi + w\cos\varphi\,. \end{aligned}\right| \qquad (13a)$$

Unter Berücksichtigung der Bedeutung von p_v und p_w erkennt man, daß durch diese Transformation an Stelle der Längskraft N_φ und der Querkraft Q_φ die Resultierenden dieser Schnittkräfte parallel und senkrecht zur Schalenachse treten, und entsprechend an Stelle der Verschiebungen v und w deren Resultierende parallel und senkrecht zur Schalenachse (Abb. 5a und 5b).

Zu (b): Aus (6) und (8) folgt

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= p_v \cos\varphi - p_w \sin\varphi\,, & q_1 &= -\frac{w}{\sin\varphi}\,,\\ p_2 &= \frac{p_v}{\sin\varphi}\,, & q_3 &= v\sin\varphi + w\cos\varphi\,. \end{aligned}\right| \qquad (13b)$$

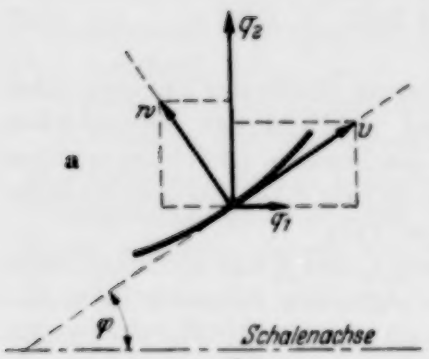


Abb. 5a. Für Fall a) Zusammenhang zwischen q_1, q_2 und v, w. Abb. 5b. Zusammenhang zwischen p_1, p_2 und p_v, p_w.

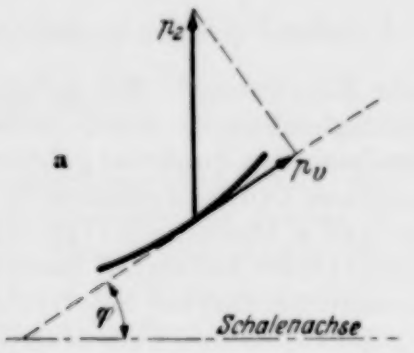


Abb. 6a, b. Für Fall b) Deutung von p_2 und q_1.

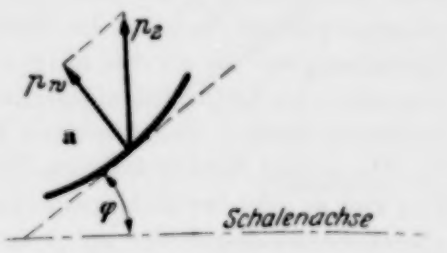


Abb. 7a, b. Für Fall c) Deutung von p_2 und q_1.

In diesem Fall ist p_2 im wesentlichen die Längskraft N_φ, doch kann man nach Abb. 6a p_2 deuten als eine Kraft senkrecht zur Schalenachse, deren Komponente in Richtung der Meridiantangente die Längskraft ist. Ebenso ist die Koordinate q_1 zu deuten als eine Verschiebung parallel zur Schalenachse, deren Komponente in Richtung der Normalen der Schalenmittelfläche die negative Verschiebung w ergibt (Abb. 6b).

Zu (c): Aus (6) und (8) folgt

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= p_v \cos\varphi - p_w \sin\varphi\,, & q_1 &= \frac{v}{\cos\varphi}\,,\\ p_2 &= \frac{p_w}{\cos\varphi}\,, & q_2 &= v\sin\varphi + w\cos\varphi\,. \end{aligned}\right| \qquad (13c)$$

Wegen $p_w = 2\pi r Q_\varphi$ ist in diesem Fall p_2 eine Kraft senkrecht zur Schalenachse, deren Komponente in Richtung der Normalen der Schalenmittelfläche die Querkraft ergibt. Diese Variabele und die Verdrehung χ haben *Reißner* und *Meißner*[1] zur Aufstellung ihrer beiden Differentialgleichungen zweiter Ordnung benutzt. Die Koordinate q_1 ist in diesem Fall eine Verschiebung parallel zur Schalenachse, deren Komponente in Richtung der Meridiantangente die Verschiebung v ist (Abb. 7a und 7b).

Die *Hamilton*sche Funktion für die neuen Impulse und Koordinaten lautet, falls wir die bis auf die Bedingung (11) beliebigen Funktionen f_1 und f_2 beibehalten,

[1] *H. Reißner*, a. a. O., *E. Meißner*, a. a. O. und *E. Meißner*, Vjschr. Naturforsch.-Ges. Zürich, 60 (1951), S. 23.

$$\left.\begin{aligned} H_1 = {} & q_2 p_1 (f_1^2 + f_2^2 + f_1 f_2' - f_1' f_2) + r_1 q_3 (p_2 \cos\varphi - p_1 f_1) + \\ & + \frac{1}{2}\frac{r_1}{r}\left\{ D\left[\left(\frac{p_1 f_2 + p_2 \sin\varphi}{D}\right)^2 - 2\nu q_2 \frac{p_1 f_2 + p_2 \sin\varphi}{D} - (1-\nu^2) q_2^2\right] + \right. \\ & \left. + K\left[\left(\frac{p_3}{K}\right)^2 - 2\nu q_3 \frac{p_3}{K}\sin\varphi - (1-\nu^2) q_3^2 \sin^2\varphi\right]\right\} + \\ & + 2\pi r r_1 \left[q_1 (Y\cos\varphi - Z\sin\varphi) + q_2 (Y f_1 + Z f_2)\right]. \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Die Koordinate q_1 tritt nur linear als Koeffizient der Belastungskomponente in Richtung der Schalenachse auf. Die rechte Seite der kanonischen Gleichungen kann also keine Glieder mit q_1 enthalten. Aus den kanonischen Gleichungen erhalten wir daher die Lösung $q_1(\varphi)$ durch eine Quadratur, falls die Lösungen der restlichen Koordinaten und Impulse aus den linearen Differentialgleichungen erster Ordnung ermittelt worden sind. Die kanonische Gleichung $q_1' = \frac{\partial H_1}{\partial p_1}$ wird hier

$$q_1' = q_2 [f_1^2 + f_2^2 + f_1 f_2' - f_1' f_2] - \nu \frac{r_1}{r} q_2 f_2 - r_1 q_3 f_1 + \frac{r_1}{r}\frac{p_1 f_2 + p_2 \sin\varphi}{D} f_2 . \quad (15)$$

Man bezeichnet q_1 als eine „zyklische Koordinate". Wir haben also an Stelle des linearen Gleichungssystems von sechs Differentialgleichungen erster Ordnung (4, 3) in den kanonischen Gleichungen, die zu der obigen *Hamilton*schen Funktion gehören, ein lineares Gleichungssystem von nur vier Differentialgleichungen erster Ordnung erhalten für p_2, p_3 und q_2, q_3. Zu diesen treten noch die beiden Quadraturen für p_1 und q_1 hinzu nach (1a), (2) und (15).

Da in der *Hamilton*schen Funktion (14) die beliebigen Funktionen f_1 und f_2 nur als Koeffizienten von p_1 und der Belastungskomponente parallel zur Schalenachse auftreten, stimmen die homogenen Gleichungen für p_2, p_3 und q_2, q_3 in allen drei Fällen (a), (b) und (c) überein. Wie wir im folgenden sehen werden, besteht die Hauptarbeit in der Integration der homogenen Gleichungen; daher wäre es zunächst gleichgültig, für welchen der drei Fälle wir uns entscheiden. Wenn wir den Fall (a) vorziehen werden, dann deshalb, weil p_1 und p_2 statisch anschaulich zu deuten sind, nämlich als die Komponenten der resultierenden Schnittkraft parallel und senkrecht zur Schalenachse, und weil q_1 und q_2 als Verschiebungen parallel und senkrecht zur Schalenachse unmittelbar praktisch interessieren.

Die homogenen kanonischen Gleichungen lauten in allen drei Fällen

$$p_2' - \nu \frac{r_1}{r} p_2 \sin\varphi = D(1-\nu^2)\frac{r_1}{r} q_2 , \quad (16a)$$

$$p_3' - \nu \frac{r_1}{r} p_3 \sin\varphi = K(1-\nu^2)\frac{r_1}{r} q_3 \sin^2\varphi - r_1 p_2 \cos\varphi , \quad (16b)$$

$$q_2' + \nu \frac{r_1}{r} q_2 \sin\varphi = \frac{r_1}{r}\frac{p_2}{D}\sin^2\varphi + r_1 q_3 \cos\varphi , \quad (16c)$$

$$q_3' + \nu \frac{r_1}{r} q_3 \sin\varphi = \frac{r_1}{r}\frac{p_3}{K} , \quad (16d)$$

denn für $p_1 = 0$ werden die Querkraft und die Längskraft die Komponenten der resultierenden Schnittkraft senkrecht zur Schalenachse. Falls also die Schale nur durch Randkräfte senkrecht zur Schalenachse und durch Randmomente belastet ist, hat p_2 in allen drei Fällen dieselbe statische Bedeutung (Abb. 8).

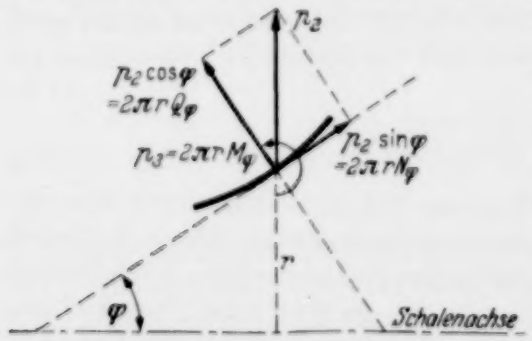


Abb. 8: Zusammenhang zwischen p_2 und Q_φ, N_φ für die unbelastete Schale.

Wenn man nun das Moment p_3 und die Verschiebung senkrecht zur Schalenachse q_2 aus diesen vier Differentialgleichungen erster Ordnung eliminiert, erhält man für die Verdrehung q_3 und die Schnittkraft senkrecht zur Schalenachse p_2 das lineare Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung, das *Reißner* und *Meißner* aufgestellt haben. Und zwar liefert der Fall (c) genau diese Gleichungen, während die beiden anderen Fälle, wie schon erwähnt, andere inhomogene Glieder aufweisen. Der symmetrische Aufbau des Gleichungssystems (16) läßt sofort erkennen, daß es leichter ist, mit (16a) und (16d) p_3 und q_2 zu eliminieren, als q_3 und p_2 mit (16b) und (16c), und so wird man zwangsläufig auf die homogenen *Reißner-Meißner*schen Gleichungen für die Verdrehung q_3 und die Schnittkraft

senkrecht zur Schalenachse p_2 geführt, die z. B. für konstante Wandstärke (D und K konstant) lauten

$$\left(\frac{r}{r_1}p_2'\right)' - p_2\left(\frac{r_1}{r}\sin^2\varphi + \nu\cos\varphi\right) = D(1-\nu^2)\, r\, q_3\cos\varphi\,,$$

$$\left(\frac{r}{r_1}q_3'\right)' - q_3\left(\frac{r_1}{r}\sin^2\varphi - \nu\cos\varphi\right) = -r_1\frac{p_2}{K}\cos\varphi\,.$$

6. Die Grundgleichungen und die kanonischen Gleichungen, aufgestellt in den achsenfesten Koordinaten. Wenn nun einmal bekannt ist, daß die Komponenten senkrecht und parallel zur Schalenachse der resultierenden Schnittkraft und die entsprechenden Verschiebungen die zu bevorzugenden Variabelen der Schalentheorie sind, so kann man gleich von einem neuen Koordinatensystem ausgehen, dessen Achsen in der Schalenachse und senkrecht hierzu liegen. Wir führen also folgendes ξ, η, ζ-Koordinatensystem (Abb. 9) ein:

ξ-Achse in Richtung der Breitenkreistangente (negative x-Achse),
η-Achse senkrecht zur Schalenachse,
ζ-Achse in der Schalenachse.

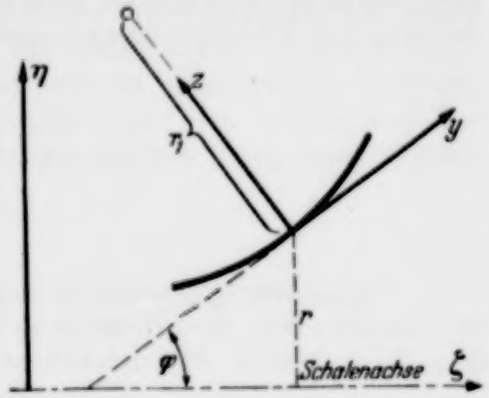


Abb. 9. Das achsenfeste Koordinatensystem.

Der Ursprung dieses Koordinatensystems wird fest auf der Schalenachse gewählt. Die Meridiankurve der Schale ist dann gegeben durch $r = f(\zeta)$. Das Bogenelement des Meridians ist $ds = \sqrt{1+f'^2}\,d\zeta$ [1] und der Krümmungshalbmesser des Meridians $r_1 = (1+f'^2)^{3/2}/f''$. Für flache Schalen ist es zweckmäßiger, den Meridian zu geben durch $\zeta = \zeta(r)$ (vgl. später II. Mitteilung), während die hier eingeführte Bezeichnung günstig für rohrförmige Schalen ist, für die also f' beschränkt bleibt. Da

$$\sin\varphi = \frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}}\,, \qquad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}$$

ist, hängen das (x, y, z)- und das (ξ, η, ζ)-Koordinatensystem nach nebenstehendem Schema der Richtungscosinus zusammen. Durch Umrechnung auf die neue unabhängige Variabele ζ statt φ und unter Berücksichtigung der Transformationsformeln (**5**, 13a), erhalten wir statt (**2**, 9) bis (**2**, 11) und (**2**, 14) bis (**2**, 22) folgende Beziehungen:

	ξ	η	ζ
x	-1	0	0
y	0	$\frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}$
z	0	$\frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}$	$\frac{-f'}{\sqrt{1+f'^2}}$

1. Gleichgewichtsbedingungen am Schalenelement (K_1 und K_2 sind die Komponenten der Belastung parallel und senkrecht zur Schalenachse)

$$\frac{d}{d\zeta}\left[\frac{f}{\sqrt{1+f'^2}}(-N_\varphi + f'Q_\varphi)\right] = f\sqrt{1+f'^2}\,K_1\,, \tag{1}$$

$$-\frac{d}{d\zeta}\left[\frac{f}{\sqrt{1+f'^2}}(f'N_\varphi + Q_\varphi)\right] + \sqrt{1+f'^2}\,N_\vartheta = f\sqrt{1+f'^2}\,K_2\,, \tag{2}$$

$$-\frac{d}{d\zeta}(fM_\varphi) + f'M_\vartheta - f\sqrt{1+f'^2}\,Q_\varphi = 0\,. \tag{3}$$

2. *Hooke*sches Gesetz (ohne Querkraftverformung)

$$2\pi N_\varphi = D(\varepsilon_\varphi + \nu\varepsilon_\vartheta)\,, \tag{4}$$

$$2\pi N_\vartheta = D(\varepsilon_\vartheta + \nu\varepsilon_\varphi)\,, \tag{5}$$

$$2\pi M_\varphi = K(\varkappa_\varphi + \nu\varkappa_\vartheta)\,, \tag{6}$$

$$2\pi M_\vartheta = K(\varkappa_\vartheta + \nu\varkappa_\varphi)\,. \tag{7}$$

3. Beziehungen zwischen den Verformungen und Verschiebungen [1]

$$\varepsilon_\varphi = \frac{q_1' + f'p_2'}{1+f'^2}\,, \tag{8}$$

[1] Durch den Strich wird jetzt immer die Ableitung nach ζ bezeichnet.

$$\varepsilon_\vartheta = \frac{q_2}{f}\,, \tag{9}$$

$$\varkappa_\varphi = \frac{q_3'}{\sqrt{1+f'^2}}\,, \tag{10}$$

$$\varkappa_\vartheta = \frac{f' q_3}{f\sqrt{1+f'^2}}\,. \tag{11}$$

4. Geometrische Nebenbedingung zwischen den Verschiebungen

$$-f' q_1' + q_2' - (1+f'^2) q_3 = 0\,. \tag{12}$$

5. Der Zusammenhang zwischen den Verschiebungskomponenten q_1 parallel und q_2 senkrecht zur Schalenachse und der Verdrehung q_3 einerseits und den natürlichen Verschiebungen v in Richtung der Meridiantangente, w in Richtung der Normalen der Schalenmittelfläche und der Verdrehung der Meridiantangente andererseits nach (5, 13a)

$$q_1 = \frac{v - f' w}{\sqrt{1+f'^2}}\,, \tag{13a}$$

$$q_2 = \frac{f' v + w}{\sqrt{1+f'^2}}\,, \tag{14a}$$

$$q_3 = \chi\,. \tag{15a}$$

6. Der Zusammenhang zwischen den Schnittkraftkomponenten p_1 parallel und p_2 senkrecht zur Schalenachse, dem Biegemoment p_3 einerseits und der Querkraft Q_φ, der Längskraft N_φ und dem Biegemoment M_φ andererseits nach (5, 13a) und (4, 1)

$$p_1 = 2\pi f \frac{N_\varphi - f' Q_\varphi}{\sqrt{1+f'^2}}\,, \tag{13b}$$

$$p_2 = 2\pi f \frac{f' N_\varphi + Q_\varphi}{\sqrt{1+f'^2}}\,, \tag{14b}$$

$$p_3 = 2\pi f M_\varphi\,. \tag{15b}$$

Die *Hamiltons*che Funktion (5, 14) erhält in den hier gewählten Variabelen die Gestalt

$$\begin{aligned} H_2 = (p_2 - f' p_1) q_3 + \frac{1}{2}\Big| D\left[\frac{(p_1+f'p_2)^2}{D^2 f\sqrt{1+f'^2}} - 2\nu q_2 \frac{p_1+f'p_2}{Df} - (1-\nu^2)\frac{\sqrt{1+f'^2}}{f} q_2^2\right] + \\ + K\left[\frac{\sqrt{1+f'^2}}{f}\left(\frac{p_3}{K}\right)^2 - 2\nu \frac{p_3}{K} q_3 - (1-\nu^2)\frac{f'^2 q_3^2}{f\sqrt{1+f'^2}}\right]\Big| + \\ + 2\pi f\sqrt{1+f'^2}\,(K_1 q_1 + K_2 q_2)\,, \end{aligned} \tag{16}$$

[1]

und die kanonischen Gleichungen lauten

$$p_\sigma = -\frac{\partial H_2}{\partial q_\sigma}\,, \qquad q_\sigma' = \frac{\partial H_2}{\partial p_\sigma} \qquad (\sigma = 1, 2, 3)\,,$$

also

$$p_1' = -2\pi f\sqrt{1+f'^2}\,K_1\,, \tag{17a}$$

$$p_2' - \nu\frac{f'}{f} p_2 = D(1-\nu^2)\frac{\sqrt{1+f'^2}}{f} q_2 + \nu\frac{p_1}{f} - 2\pi f\sqrt{1+f'^2}\,K_2\,, \tag{17b}$$

$$p_3' - \nu\frac{f'}{f} p_3 = K(1-\nu^2)\frac{f'^2}{f\sqrt{1+f'^2}} q_3 - (p_2 - f' p_1)\,, \tag{17c}$$

$$q_1' = \frac{p_1 + f' p_2}{Df\sqrt{1+f'^2}} - f' q_3 - \nu\frac{q_2}{f}\,, \tag{17d}$$

$$q_2' + \nu\frac{f'}{f} q_2 = f'\frac{p_1 + f' p_2}{Df\sqrt{1+f'^2}} + q_3\,, \tag{17e}$$

$$q_3' + \nu\frac{f'}{f} q_3 = \frac{\sqrt{1+f'^2}}{f}\frac{p_3}{K}\,. \tag{17f}$$

---

[1] Damit $\sum_{\sigma=1}^{3} p_\sigma dq_\sigma - H_1 d\varphi$ in $\sum_{\sigma=1}^{3} p_\sigma dq_\sigma - H_2 d\zeta$ übergeht, muß $H_2 = H_1 \frac{d\varphi}{d\zeta}$ sein, wobei noch in H_1 (5, 14) $f_1 = \sin\varphi$ und $f_2 = \cos\varphi$ zu setzen sind.

Die ersten drei kanonischen Gleichungen sind — entsprechend den kanonischen Gleichungen (4, 3) — identisch mit den Gleichgewichtsbedingungen (1) bis (3), in denen nach dem *Hooke*schen Gesetz für die Ringkraft

$$2\pi N_\vartheta = \nu \frac{p_1 + f' p_2}{f\sqrt{1+f'^2}} + D(1-\nu^2)\frac{q_2}{f} \tag{18}$$

und für das Ringmoment

$$2\pi M_\vartheta = \nu \frac{p_3}{f} + K(1-\nu^2)\frac{f' q_3}{f\sqrt{1+f'^2}} \tag{19}$$

gesetzt ist. Die zweite Gruppe den kanonischen Gleichungen gibt eine Verknüpfung des *Hooke*schen Gesetzes (4) mit (8) und (9) und der Nebenbedingung (12) an und das *Hooke*sche Gesetz für das Biegemoment (6) mit (10) und (11).

Die kanonischen Gleichungen (17) bilden ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung von vier Gleichungen — q_1 ist zyklische Koordinate, und daher werden q_1 und p_1 durch Quadraturen ermittelt —, für die Komponenten der Schnittkraft und der Verschiebung senkrecht zur Schalenachse, das Biegemoment um die Breitenkreistangente und die Verdrehung der Meridiantangente. Sie sind die *Euler*schen Gleichungen des kanonischen Variationsproblems

$$\delta \int \left| \sum_{\sigma=1}^{3} p_\sigma q'_\sigma - H_2 \right| d\zeta = 0 .$$

7. Dimensionslose Größen. In den homogenen kanonischen Differentialgleichungen

$$p'_2 - \nu \frac{f'}{f} p_3 = D(1-\nu^2)\frac{\sqrt{1+f'^2}}{f} q_2 , \tag{1a}$$

$$p'_3 - \nu \frac{f'}{f} p_3 = K(1-\nu^2)\frac{f'^2}{f\sqrt{1+f'^2}} q_3 - p_2 , \tag{1b}$$

$$q'_2 + \nu \frac{f'}{f} q_3 = \frac{1}{D}\frac{f'^2}{f\sqrt{1+f'^2}} p_2 + q_3 , \tag{1c}$$

$$q'_3 + \nu \frac{f'}{f} q_3 = \frac{1}{K}\frac{\sqrt{1+f'^2}}{f} p_3 . \tag{1d}$$

stören die Koeffizienten D, K und $(1-\nu^2)$ (vgl. Abschn. **2**) den symmetrischen Aufbau. Nun läßt sich eine kanonische Transformation angeben, bei der die transformierten Impulse und Koordinaten die mit dem Symmetrisierungsfaktor $\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}/\mathrm{h}$ multiplizierten p_σ und q_σ sind, so daß das transformierte kanonische Gleichungssystem eine völlig symmetrische Gestalt hat. Mit dieser Symmetrisierung wollen wir gleichzeitig dimensionslose Größen einführen. Da die dimensionslosen Differentialgleichungen wieder kanonische Gestalt haben sollen, sind die Bezugsgrößen für die Kräfte, das Moment und die Verschiebungen nicht unabhängig voneinander; die Einführung dimensionsloser Größen muß demnach durch eine kanonische Transformation geschehen.

Die dimensionslosen Impulse und Koordinaten seien P_1, P_2, P_3 und Q_1, Q_2, Q_3. An Stelle der Schalendicke h, des Breitenkreisradius f und der Koordinate auf der Schalenachse ζ werden die Dimensionslosen η, ϱ, $\bar{\zeta}$ wie folgt eingeführt:

$$\eta = \frac{h}{h_0} , \qquad \varrho = \frac{f}{r_0} , \qquad \bar{\zeta} = \frac{\zeta}{r_0} , \tag{2}$$

wobei die Bezugsgrößen r_0 und h_0 ein mittlerer Breitenkreisradius bzw. eine mittlere Schalendicke sein sollen.

Die „erzeugende Funktion" V, entsprechend Abschn. **5**, sei

$$V = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{4\pi E h_0^2 r_0}\left[r_0 p_1 Q_1 + \frac{r_0}{\eta} p_2 Q_2 + \frac{1}{\eta} p_3 Q_3 \right] . \tag{3}$$

Die Transformationsgleichung (**5**, 4a) lautet für diesen Fall zweckmäßig umgeschrieben

$$\left(\sum_{\sigma=1}^{3} P_\sigma dQ_\sigma - \bar{H} d\bar{\zeta} \right) + \frac{1}{4\pi E h_0^2 r_0}\left(\sum_{\sigma=1}^{3} q_\sigma dp_\sigma - H_2 d\zeta \right) = dV ,$$

wobei der Faktor $1/4\pi E h_0^2 r_0$ auch den zweiten Summanden dimensionslos macht. Dann ergibt sich aus den allgemeinen Gleichungen einer kanonischen Transformation, entsprechend

(5, 3), $P_\sigma = \partial V/\partial Q_\sigma$, also

$$P_1 = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}\,\frac{p_1}{4\pi E h_0^2}\,, \tag{4a}$$

$$P_2 = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\eta}\,\frac{p_2}{4\pi E h_0^2}\,, \tag{4b}$$

$$P_3 = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\eta}\,\frac{p_3}{4\pi E h_0^2 r_0} \tag{4c}$$

und

$$\frac{1}{4\pi E h_0^2 r_0}\,q_\sigma = \frac{\partial V}{\partial p_\sigma}\,,$$

also

$$q_1 = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}\,r_0 Q_1\,, \tag{5a}$$

$$q_2 = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\eta}\,r_0 Q_2\,, \tag{5b}$$

$$q_3 = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\eta}\,Q_3\,. \tag{5c}$$

Die dimensionslose *Hamilton*sche Funktion ergibt sich entsprechend aus

$$\bar{H} = \frac{H_2}{4\pi E h_0^2} - \frac{\partial V}{\partial \bar{\zeta}} \tag{6}$$

mit

$$\frac{\partial V}{\partial \bar{\zeta}} = -\frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{4\pi E h_0^2 r_0}\,\frac{\eta'}{\eta^2}\,(r_0 p_2 Q_2 + p_3 Q_3)\,, \tag{7}$$

indem man in (5, 16) und in (7) die p_σ, q_σ durch die P_σ und Q_σ nach (4) und (5) ersetzt:

$$\left.\begin{aligned}\bar{H} = {} & \left(P_2 - \frac{\varrho'}{\eta}\,P_1\right) Q_3 + \frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{\lambda}\,\frac{\sqrt{1+\varrho'^2}}{\eta\varrho}\,(P^2 - Q_2^2) + \right.\\ & + \left.\sqrt{\frac{1-\nu^2}{3}}\,\frac{\lambda\eta}{\varrho\sqrt{1+\varrho'^2}}\left[\left(\frac{P_1}{\eta} + \varrho'\,P_2\right)^2 - \varrho'^2 Q_3^2\right]\right\} + \left(\frac{\eta'}{\eta} - \nu\,\frac{\varrho'}{\varrho}\right)(P_2 Q_2 + P_3 Q_3) - \\ & - \frac{\nu}{\eta\varrho}\,P_1 Q_2 + \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{E\lambda^2}\,\varrho\sqrt{1+\varrho'^2}\left(K_1 Q_1 + K_2\,\frac{Q_2}{\eta}\right).\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Der Faktor $\lambda = \dfrac{h_0}{r_0}$ ist sehr klein gegen eins. Die kanonischen Gleichungen lauten

$$P_1' = -\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{E\lambda^2}\,\varrho\sqrt{1+\varrho'^2}\,K_1\,, \tag{9a}$$

$$P_2' + \left(\frac{\eta'}{\eta} - \nu\,\frac{\varrho'}{\varrho}\right)P_2 = \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{\lambda}\,\frac{\sqrt{1+\varrho'^2}}{\eta\varrho}\,Q_2 + \frac{\nu}{\eta\varrho}\,P_1 - \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{E\lambda^2}\,\frac{\varrho}{\eta}\sqrt{1+\varrho'^2}\,K_2\,, \tag{9b}$$

$$P_3' + \left(\frac{\eta'}{\eta} - \nu\,\frac{\varrho'}{\varrho}\right)P_3 = \sqrt{\frac{1-\nu^2}{3}}\,\lambda\,\frac{\eta\varrho'^2}{\varrho\sqrt{1+\varrho'^2}}\,Q_3 - \left(P_2 - \frac{\varrho'}{\eta}\,P_1\right), \tag{9c}$$

$$Q_1' = \sqrt{\frac{1-\nu^2}{3}}\,\lambda\,\frac{\dfrac{P_1}{\eta} + \varrho' P_2}{\varrho\sqrt{1+\varrho'^2}} - \frac{\nu}{\eta\varrho}\,Q_2 - \frac{\varrho}{\eta}\,Q_3\,, \tag{9d}$$

$$Q_3' - \left(\frac{\eta'}{\eta} - \nu\,\frac{\varrho'}{\varrho}\right)Q_2 = \sqrt{\frac{1-\nu^2}{3}}\,\lambda\,\frac{\eta\varrho'}{\varrho\sqrt{1+\varrho'^2}}\left(\frac{P_1}{\eta} + \varrho'\,P_2\right) + Q_3\,, \tag{9e}$$

$$Q_3' - \left(\frac{\eta'}{\eta} - \nu\,\frac{\varrho'}{\varrho}\right)Q_3 = \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{\lambda}\,\frac{\sqrt{1+\varrho'^2}}{\eta\varrho}\,P_3\,. \tag{9f}$$

Dies sei die endgültige Gestalt der Schalengleichungen, deren Integration in der II. Mitteilung besprochen werden soll.

Rückblickend können wir feststellen, daß uns die Variationsrechnung, insbesondere der Übergang zum kanonischen Variationsproblem, zwangsläufig auf die bei unserem Schalenproblem zu bevorzugenden Variabelen geführt hat, die unmittelbar anschauliche Bedeutung haben. Durch Verwertung eines bekannten Integrals gelang es, das Integrationsproblem von der sechsten auf die vierte Ordnung zu erniedrigen, wodurch nun auch geklärt ist, weshalb *Reißner* und *Meißner* ihre beiden simultanen Differentialgleichungen zweiter Ordnung aufstellen konnten. Die kanonische Gestalt des Differentialgleichungssystems ist, wie wir im folgenden zeigen werden, für die numerische Integration vorteilhaft. Vor allen Dingen läßt sich sehr einfach durch Variation der Konstanten eine Partikularlösung ermitteln, so daß wir nicht mehr auf die Kenntnis des zugehörigen Membranspannungszustands angewiesen sind, der ja keineswegs bei allen Schalen vorhanden ist.

(Eingegangen am 11. August 1950.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *H. Münz*, Technische Hochschule Braunschweig. Institut für Technische Mechanik.

Neuartige Behandlung der Poissonschen und der inhomogenen Bipotentialgleichung bei rechteckigen Bereichen mit Anwendung auf Probleme der Torsion und der Plattenbiegung.

Von Th. Schade.

1. Einleitung. Zur Behandlung potentialtheoretischer Randwertprobleme geht man bekannterweise so vor, daß man eine solche Koordinatentransformation der kartesischen Koordinaten ansetzt, daß eine der Variablen auf den Rand konstant wird. Gelingt nach Transformation der *Laplace*schen Differentialgleichung $\Delta\Phi = 0$ die Trennung der Variablen, so versucht man durch Reihenansatz der so gewonnenen Potentialfunktionen die Randbedingungen zu befriedigen. Analoges gilt für die Bipotentialgleichung $\Delta\Delta\Phi = 0$. Hat man es mit der inhomogenen Differentialgleichung

$$\Delta\Phi = f(x, y)$$

zu tun, so überlagert man eine Partikularlösung der inhomogenen Differentialgleichung mit Lösungen der homogenen Differentialgleichung so, daß wiederum den Randbedingungen genügt wird.

Diese beiden Bedingungen, Erfüllung der Differentialgleichung und Erfüllung der Randbedingungen lassen sich in vielen Fällen nicht exakt durchführen, so daß man gezwungen ist, irgendwelche Näherungen zuzulassen (wie z. B. das Beispiel der vollständig eingespannten rechteckigen Platte mittels eines Ansatzes von *Fourier*-Doppelreihen zeigt).

Es soll nun hier versucht werden, durch eine Koordinatentransformation in schiefwinkligen Koordinaten die Differentialgleichung und die Randbedingungen ganz oder teilweise exakt zu erfüllen und dafür Unstetigkeiten höherer Ableitungen der Lösungen, die physikalisch für das Problem nur eine untergeordnete Rolle spielen, an gewissen Stellen in Kauf zu nehmen.

Diese Methode wird vornehmlich an Plattenproblemen durchgeführt, wobei zunächst bekannte Aufgabenstellungen untersucht werden, um einen Vergleich der Ergebnisse zu ermöglichen.

Dazu sei noch folgendes bemerkt: Die bisher üblichen Methoden der *Fourier*-Doppelreihen oder der anderen numerischen Verfahren auf der Grundlage der Differenzenrechnungen haben gerade bezüglich der Berechnung der physikalisch interessierenden Größen gewisse Nachteile. Bei den Reihendarstellungen sind es Konvergenzschwierigkeiten, und bei den numerischen Verfahren sind es Fehler in der numerischen Differentiation, abgesehen von den meist recht komplizierten Berechnungsverfahren. Es soll hier dagegen versucht werden, geschlossene analytische Ausdrücke zu finden, die das physikalische Problem zumindestens für die Praxis genau genug darstellen und nicht die oben erwähnten Nachteile in sich tragen.

In den zur Diskussion stehenden Fällen soll es sich um eine rechteckige Berandung handeln, wobei speziell die quadratische Berandung untersucht werden soll.

Um zu einer entsprechenden Parameterdarstellung zu kommen, kann man sich der Koordinatentransformation bedienen, die *R. Grammel*[1] in einer Arbeit über „Erweiterte Kreisfunktionen" angibt.

Ausgehend von der algebraischen Gleichung

$$x^n + y^n = 1 \qquad (n \text{ ganzzahlig})$$

definiert *R. Grammel* die erweiterten Kreisfunktionen durch

$$\left.\begin{aligned} x &= \mathfrak{Cof}(n)\, v\,, \\ y &= \mathfrak{Sin}(n)\, v \end{aligned}\right\} \qquad (1, 1)$$

(Abb. 1), wofür in der erwähnten Arbeit Reihenentwicklungen angegeben worden sind. Gleichung (1, 1) stellt für gerades n eine geschlossene Kurve dar, die für $n \to \infty$ in ein Quadrat ausartet; die Periode $2\pi_n$ liegt für $n \to \infty$ in den Grenzen $2\pi \leq 2\pi_n \leq 8$.

Es liegt nun nahe, diese Funktionen zu benutzen, um eine Parameterdarstellung der kartesischen Koordinaten in der eingangs geforderten Form aufzuschreiben, was schon durch die

[1] *R. Grammel*, Ing.-Arch. 16 (1948), S. 188 sowie 18 (1950), S. 250.

einfache schiefwinklige Koordinatentransformation

$$\left.\begin{aligned} x &= \varrho\, \mathfrak{Cof}\,(n)\, v\,, \\ y &= \varrho\, \mathfrak{Sin}\,(n)\, v \end{aligned}\right| \qquad (1,2)$$

erreicht wird (Abb. 2). Mit $n \to \infty$ erhält man für $\varrho =$ konst. eine Schar ineinanderliegender Quadrate und für $v =$ konst. die Geradenschar durch den Nullpunkt.

Für eine rechteckige Berandung könnte man analog die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} x &= a\, \varrho\, \mathfrak{Cof}\,(n)\, v\,, \\ y &= b\, \varrho\, \mathfrak{Sin}\,(n)\, v \end{aligned}$$

benutzen, wobei dann, wenn man die geometrischen Bezeichnungen der Ellipse übertragend anwendet, a und b die Halbachsen der geschlossenen Kurve $\varrho = 1$ darstellen. Der Einfachheit halber soll zunächst das Quadrat untersucht werden.

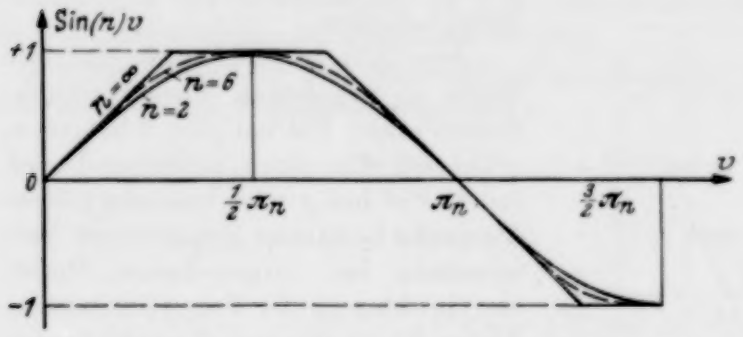


Abb. 1. Graphische Darstellung der Funktionen Cos $(n)v$, Sin $(n)v$.

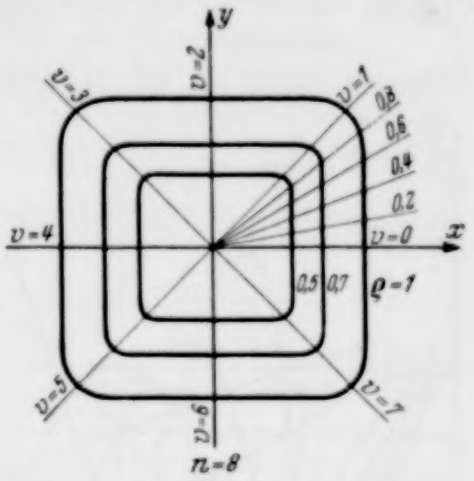


Abb. 2.
Das schiefwinklige ϱ, v-Koordinatensystem.

2. Transformation der Potentialgleichung und ihre Lösung. Geht man den in der Einleitung erwähnten üblichen Weg, so hat man (1, 2) auf die Potentialgleichung

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \qquad (2,1)$$

anzuwenden.

$$\text{Mit } \left.\begin{aligned} \frac{\partial \varrho}{\partial x} &= \mathfrak{Cof}\,(n)^{n-1} v\,, & \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{1}{\varrho}\, \mathfrak{Sin}\,(n)\, v\,, \\ \frac{\partial \varrho}{\partial y} &= \mathfrak{Sin}\,(n)^{n-1} v, & \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\varrho}\, \mathfrak{Cof}\,(n)\, v\,, \end{aligned}\right| \qquad (2,2)$$

erhält man für die Differentialgleichung (2,1)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varrho^2} \left[\mathfrak{Cof}\,(n)^{2n-2} v + \mathfrak{Sin}\,(n)^{2n-2} v\right] + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} \frac{1}{\varrho^2} \left[\mathfrak{Sin}\,(n)^2 v + \mathfrak{Cof}\,(n)^2 v\right] + \\ &+ 2 \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{\varrho} \left[\mathfrak{Sin}\,(n)^{n-1} v\, \mathfrak{Cof}\,(n)\, v - \mathfrak{Cof}\,(n)^{n-1} v\, \mathfrak{Sin}\,(n)\, v\right] + \\ &+ \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} \frac{n-1}{\varrho} \mathfrak{Sin}\,(n)^{n-2} v\, \mathfrak{Cof}\,(n)^{n-2} v \left[\mathfrak{Cof}\,(n)^2 v + \mathfrak{Sin}\,(n)^2 v\right] + \\ &+ 2 \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{1}{\varrho^2} \left[\mathfrak{Cof}\,(n)^{n-1} v\, \mathfrak{Sin}\,(n)\, v - \mathfrak{Sin}\,(n)^{n-1} v\, \mathfrak{Cof}\,(n)\, v\right]. \end{aligned}\right| \qquad (2,3)$$

Mit dem Produktenansatz

$$\Phi_\lambda = \varrho^\lambda F_\lambda\,(v)$$

zur Trennung der Variablen und der Substitution

$$U_\lambda\,(v) = F_\lambda\,(v) \left(\mathfrak{Sin}\,(n)^2 v + \mathfrak{Cof}\,(n)^2 v\right)^{\frac{1-\lambda}{2}}$$

ergibt sich die Differentialgleichung für $U_\lambda\,(v)$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2 U_\lambda(v)}{dv^2} + U_\lambda\,(v) \left[(n-1)\, \mathfrak{Sin}\,(n)^{n-2} v\, \mathfrak{Cof}\,(n)^{n-2} v + \right. \\ &\left. + (\lambda^2 - 1) \left(\mathfrak{Sin}\,(n)^2 v + \mathfrak{Cof}\,(n)^2 v\right)^{-1}\right] = 0\,, \end{aligned}\right| \qquad (2,4)$$

mit der allgemeinen Lösung

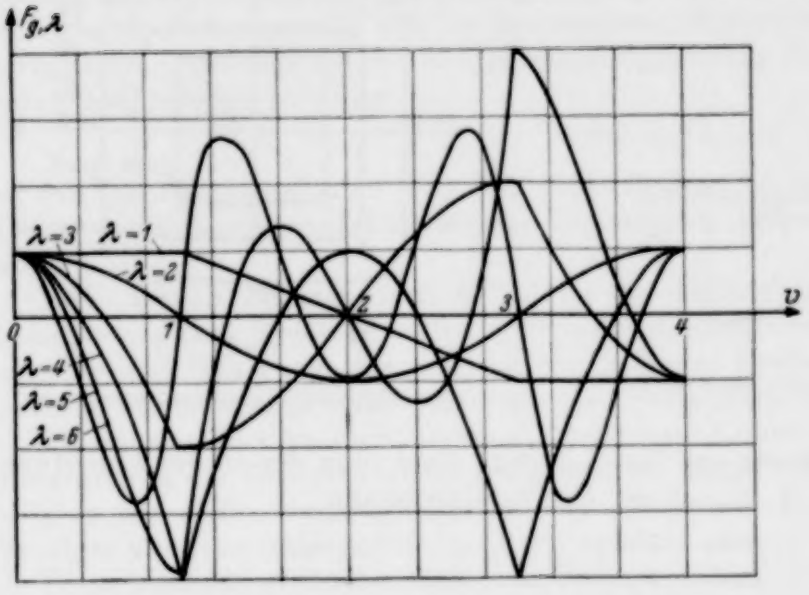
$$U_\lambda(v) = \sqrt{\mathfrak{Sin}(n)^2 v + \mathfrak{Cof}(n)^2 v}\, \left|\begin{matrix}\mathfrak{Sin}\\ \mathfrak{Cof}\end{matrix}\right| \lambda \operatorname{arc\,tg}(\mathfrak{Tg}(n) v)\,.$$

Führt man in (2,4) die Substitution $\mathfrak{Tg}(n) v = \operatorname{tg} u$ ein, so erhält man für ganzzahliges λ und $n \to \infty$ unter Einführung der komplexen Größe $z = x + iy$, bzw. $\bar{z} = x - iy$ die bekannten Potentialfunktionen in kartesischen Koordinaten

$$\left.\begin{aligned} &\text{a)}\ \lambda = -\lambda_1 < 0 : \Phi_{-\lambda_1} = \left|\begin{matrix}Re\\ Jm\end{matrix}\right| \frac{1}{z^{\lambda_1}}\,,\\ &\text{b)}\ \lambda = 0 : \Phi_0 = \operatorname{arc\,tg}(\mathfrak{Tg}(n) v) = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\,,\\ &\text{c)}\ \lambda > 0 : \Phi_\lambda = \left|\begin{matrix}Re\\ Jm\end{matrix}\right| z^\lambda\,. \end{aligned}\right\} \qquad (2,5)$$

Für die späteren Beispielrechnungen ist es sehr viel praktischer, die Darstellung der Funktionen im (ϱ, v)-Koordinatensystem beizubehalten.

Aus (2,5) erkennt man, daß die unter a) gegebenen Potentialfunktionen einen Pol bei $\varrho = 0$ besitzen, während die unter c) angegebenen einen Pol bei $\varrho = \infty$ besitzen; diese Tatsache bestimmt ihre weitere Verwendung bei vorgegebenen Randwertproblemen der Potentialtheorie. Unter b) ist die von ϱ unabhängige Potentialfunktion angegeben.



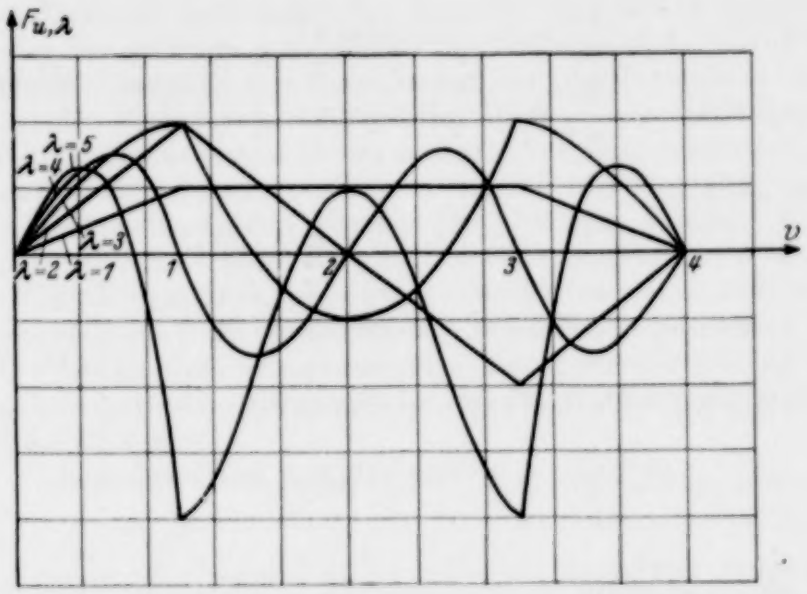


Abb. 3. Graphische Darstellung der Funktionen $F_{g,\lambda}$, $F_{u,\lambda}$.

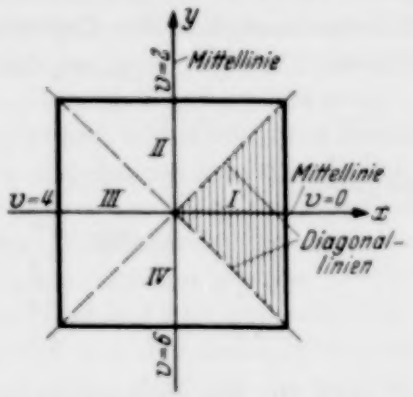


Abb. 4. Einteilung der Bereiche für das Randwertproblem.

Man erhält allgemein für alle in Polarkoordinaten r, φ bekannten Potentialfunktionen durch folgende Zuordnung die entsprechenden im (ϱ, v)-Koordinatensystem:

$$\left.\begin{aligned} r &= \varrho \sqrt{\mathfrak{Sin}^2(n) v + \mathfrak{Cof}^2(n) v}\,,\\ \varphi &\to \operatorname{arc\,tg}\,\mathfrak{Tg}(n) v\,. \end{aligned}\right\} \qquad (2,6)$$

Die Bipotentialfunktionen Ψ erhält man durch Multiplikation der Potentialfunktionen mit $x^2 + y^2 = z\,\bar{z}$, womit sich analog zu (2,5) ergibt

$$\left.\begin{aligned} &\text{a)}\ \lambda = -\lambda_1 < 0 : \Psi_{-\lambda_1} = \left|\begin{matrix}Re\\ Jm\end{matrix}\right| \frac{\bar{z}}{z^{\lambda_1 - 1}}\,,\\ &\text{b)}\ \lambda = 0;\ \Psi_0 = z\,\bar{z} \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} = (x^2 + y^2) \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\,,\\ &\text{c)}\ \lambda > 0;\ \Psi_\lambda = \left|\begin{matrix}Re\\ Jm\end{matrix}\right| \bar{z}\, z^{\lambda_1 + 1}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (2,7)$$

Für $\lambda_2 = 2$ erhält man die von ϱ unabhängige Bipotentialfunktion, für $\lambda > 2$ diejenigen mit einem Pol bei $\varrho = \infty$ und für $\lambda_1 < 2$ solche mit einem Pol im Nullpunkt. Die unter (2,6) gegebene Zuordnung behält natürlich auch hier ihre volle Gültigkeit.

Mit
$$\Phi_\lambda(\varrho, v) = \varrho^\lambda F_\lambda(v) = \varrho^\lambda (F_{g,\lambda} + i F_{u,\lambda}) \tag{2,8}$$
erhält man die in Abb. 3 dargestellten Funktionen für $n \to \infty$. Teilt man weiterhin, wie in Abb. 4 angegeben, das Quadrat in 4 Bereiche I bis IV, so interessieren für doppelsymmetrische Probleme nur Funktionen, die zu den Mittellinien $v = 0; 4; 2; 6$ symmetrisch sind; analog erhält man für rein unsymmetrische Probleme die hierzu unsymmetrischen Funktionen.

Diese kann man sich aber leicht aus den in Abb. 3 gegebenen Funktionen konstruieren, wenn man sie stückweise bei $v = 1; 3; 5; 7$ zusammensetzt. Der absolute Betrag der Ordinaten an der Flickstelle ist für beide Kurventeile mit dem gleichen Parameter λ von vornherein gleich.

Abb. 5a und 5b zeigen die somit geschaffenen Funktionen für eine Viertelsperiode.

Diese Zusammensetzung bedingt, daß man bei dem entsprechenden Randwertproblem sich nur um die Bereiche I und II zu kümmern braucht, wobei man zusätzlich gewisse Stetigkeitsbedingungen der Ableitungen an den Diagonallinien zu erfüllen hat. Es wird sich zunächst um doppelsymmetrische Probleme handeln.

Für die Potential- und Bipotentialfunktionen im Bereich I ergeben sich folgende Polynomausdrücke im (ϱ, v)-Koordinatensystem:

$$\Phi_{g,2n} = \varrho^{2n}\left[1 - \binom{2n}{2} v^2 + \binom{2n}{4} v^4 - \ldots\ldots\ldots (-1)^n v^{2n}\right],$$

$$\Phi_{g,2n+1} = \varrho^{2n+1}\left[1 - \binom{2n+1}{2} v^2 + \binom{2n+1}{4} v^4 - \ldots (-1)^n (2n+1) v^{2n}\right],$$

$$\Phi_{u,2n} = \varrho^{2n}\left[2n v - \binom{2n}{3} v^3 + \binom{2n}{5} v^1 - \ldots + (-1)^{n+1} 2n v^{2n-1}\right],$$

$$\Phi_{u,2n+1} = \varrho^{2n+1}\left[(2n+1) v - \binom{2n+1}{3} v^3 + \ldots + (-1)^n v^{2n+1}\right],$$

$$\Psi_\lambda = \varrho^2 (1 + v^2)\, \Phi_\lambda .$$

Die Funktionstafeln[1] können rekursiv errechnet werden. Wie man leicht zeigen kann, gilt

$$\begin{aligned} F_{g,\lambda+1} &= F_{g,\lambda} F_{g,1} - F_{u,\lambda} F_{u,1} , \\ F_{u,\lambda+1} &= F_{g,\lambda} F_{u,1} + F_{u,\lambda} F_{g,1} . \end{aligned} \tag{2,10}$$

Besonders wertvoll ist die Tatsache, daß sich die Ableitungen der Lösungsfunktionen, die zur zahlenmäßigen Berechnung der physikalischen Größen notwendig sind, wieder als Linearkombinationen der Potential- und Bipotentialfunktion angeben lassen, so daß man sich der gleichen Tabelle bedienen kann.

Es ergeben sich im einzelnen folgende Ausdrücke, wobei es sich auch in Zukunft von selbst verstehen soll, daß man Real- und Imaginärteil für sich zu nehmen hat:

$$\frac{\partial \Phi_\lambda}{\partial x} = \lambda \Phi_{\lambda-1} = -i \frac{\partial \Phi_\lambda}{\partial y} , \qquad \frac{\partial^3 \Phi_\lambda}{\partial x^3} = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\Phi_{\lambda-3} = i \frac{\partial^3 \Phi_\lambda}{\partial y^3} ,$$

$$\frac{\partial \Phi_\lambda}{\partial x^2} = \lambda(\lambda-1)\Phi_{\lambda-2} = -\frac{\partial^2 \Phi_\lambda}{\partial y^2} , \qquad \frac{\partial^3 \Phi_\lambda}{\partial x\, \partial y^2} = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\Phi_{\lambda-3} = i \frac{\partial^3 \Phi_\lambda}{\partial x^2 \partial y} ,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_\lambda}{\partial x\, \partial y} = i\lambda(\lambda-1)\Phi_{\lambda-2} ,$$

$$\frac{\partial \Psi_\lambda}{\partial x} = (\lambda+1)\Psi_{\lambda+1} + \Phi_{\lambda+1} , \qquad \frac{\partial^3 \Psi_\lambda}{\partial x^3} = \lambda(\lambda+1)[(\lambda-1)\Psi_{\lambda-3} + 3\Phi_{\lambda-1}] ,$$

$$\frac{\partial \Psi_\lambda}{\partial y} = i[(\lambda+1)\Psi_{\lambda+1} - \Phi_{\lambda+1}] , \qquad \frac{\partial^3 \Psi_\lambda}{\partial y^3} = i\lambda(\lambda+1)[-(\lambda-1)\Psi_{\lambda-3} + \Phi_{\lambda-1}] ,$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_\lambda}{\partial x^2} = (\lambda+1)[\lambda\Psi_{\lambda-2} + 2\Phi_\lambda] , \qquad \frac{\partial^3 \Psi_\lambda}{\partial x^2\, \partial y} = i\lambda(\lambda+1)[(\lambda-1)\Psi_{\lambda-3} + \Phi_{\lambda-1}] ,$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_\lambda}{\partial y^2} = (\lambda+1)[-\lambda\Psi_{\lambda-2} + 2\Phi_\lambda] , \qquad \frac{\partial^3 \Psi_\lambda}{\partial x\, \partial y^2} = \lambda(\lambda+1)[-(\lambda-1)\Psi_{\lambda-3} + \Phi_{\lambda-1}] ,$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_\lambda}{\partial x\, \partial y} = i\lambda(\lambda+1)\Psi_{\lambda-2} ,$$

$$\Delta \Psi_\lambda = 4(\lambda+1)\Phi_\lambda .$$

[1] Diese Funktionstafeln sind im Originalexemplar der Habilitationsschrift angegeben.

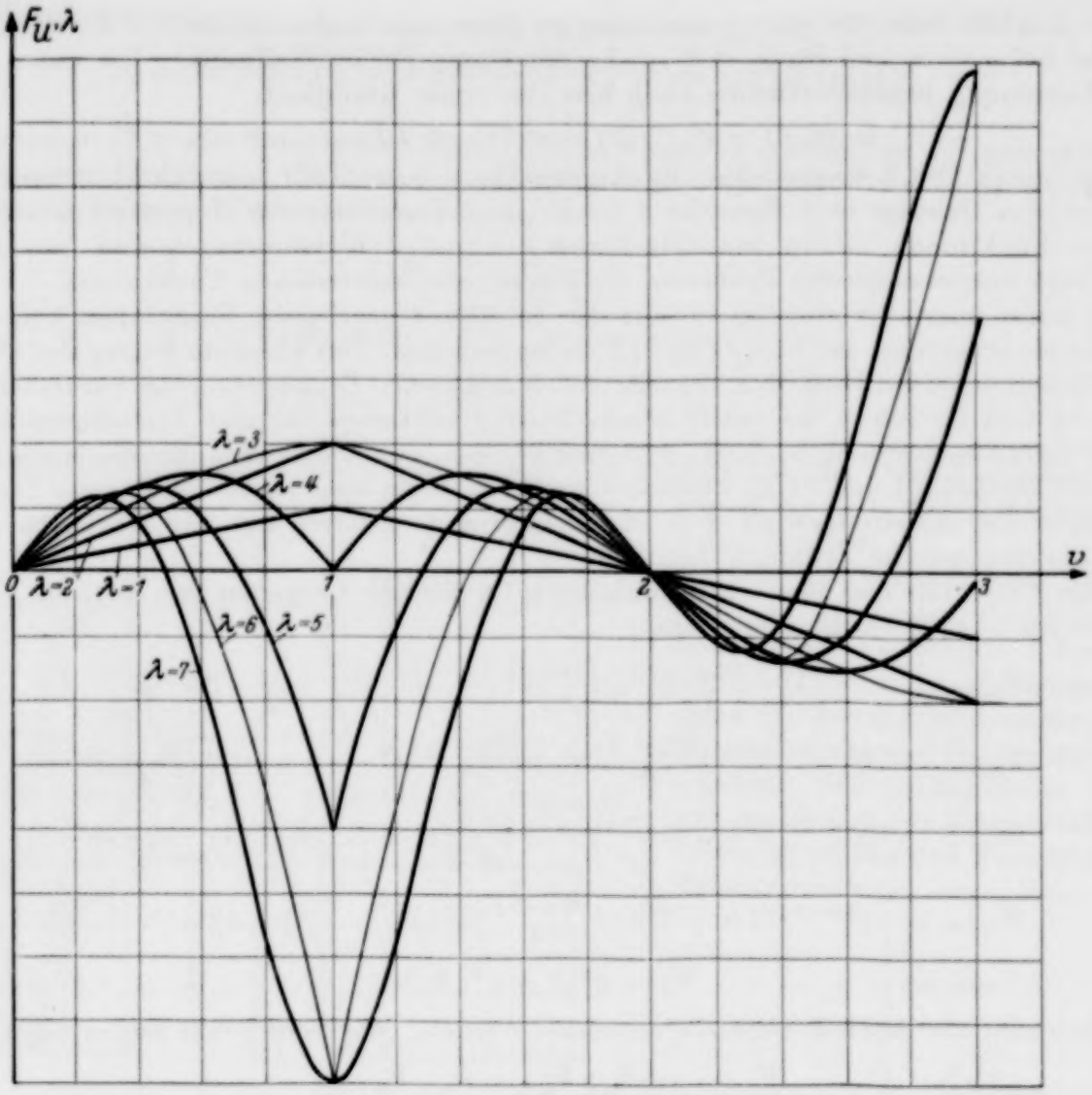


Abb. 5a. Unsymmetrische Potentialfunktionen.

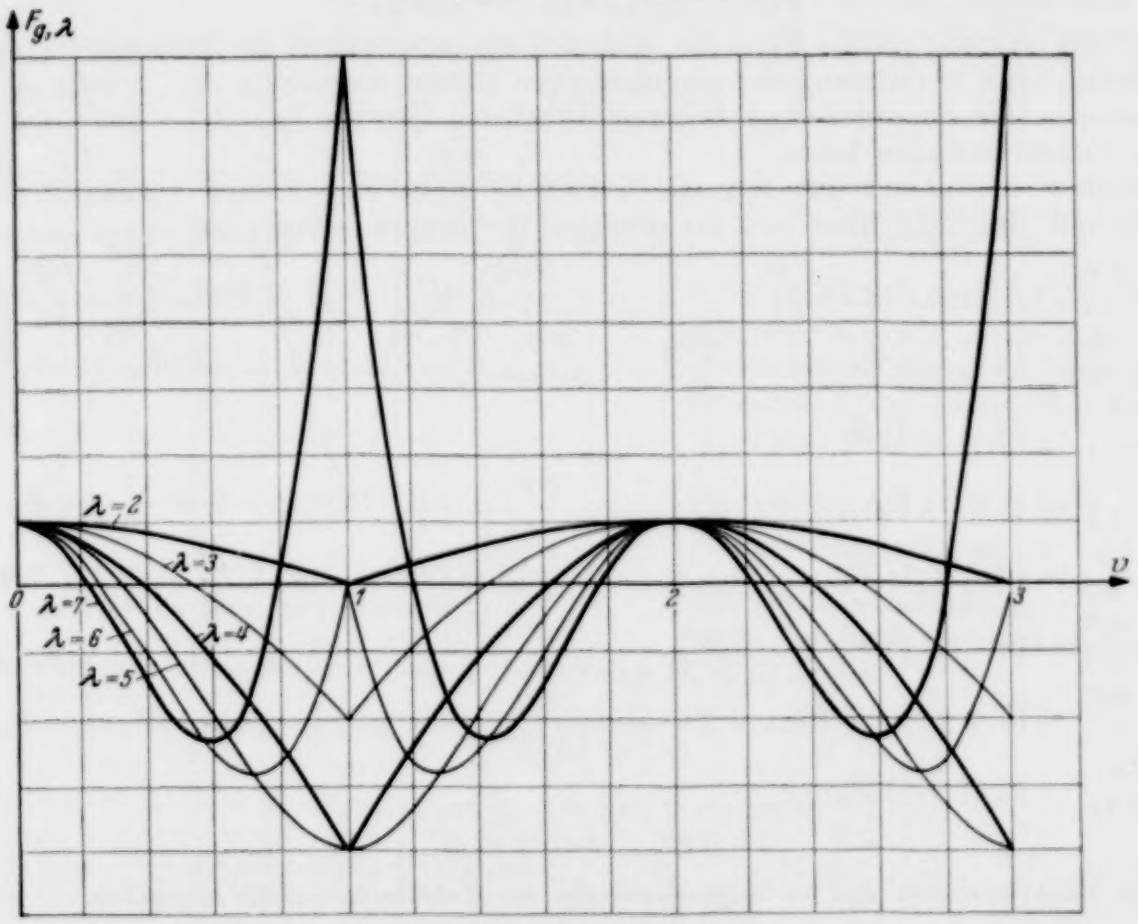


Abb. 5b. Symmetrische Potentialfunktionen.

Für die nun folgenden Beispielrechnungen soll allgemein festgesetzt werden, daß Potentialfunktionen mit dem Koeffizienten a_λ und die Bipotentialfunktion mit den Koeffizienten b_λ versehen werden.

3. Beispielrechnungen. a) Torsion eines prismatischen Stabes mit quadratischem Querschnitt (Abb. 6). Für das Problem des tordierten prismatischen Stabes lautet die Differentialgleichung

$$\Delta \Phi = -K = -2G\omega \tag{3,1}$$

mit G als Gleitmodul und ω als Verdrehwinkel, woraus sich die Schubspannungen ergeben zu

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \qquad \tau_{zy} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}. \tag{3,2}$$

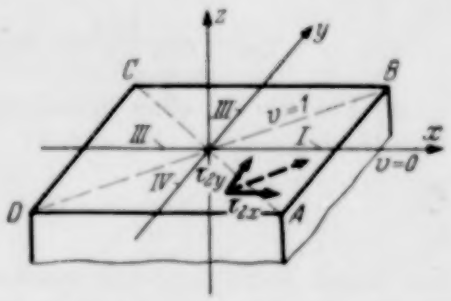


Abb. 6. Querschnitt des prismatischen Stabes.

Die Randbedingung lautet

$$\Phi = 0 \quad \text{für} \quad \varrho = \varrho_0. \tag{3,3}$$

Dazu kommt die zusätzliche Randbedingung aus der Schubspannungsfreiheit der Mantelfläche

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad \text{für} \quad \varrho = \varrho_0,\ v = 1$$

und die Stetigkeitsbedingung der ersten Ableitung an den Diagonalen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad \text{für} \quad v = 1, \tag{3,4}$$

Man bedient sich bei der numerischen Rechnung der im vorigen Abschnitt definierten symmetrischen Potentialfunktionen. Da man die Stetigkeitsbedingung (3,4) nicht exakt erfüllen kann, soll näherungsweise die Bedingung

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad \text{für} \quad \varrho = \varrho_0/2,\ v = 1$$

gestellt werden.

Mit dem Ansatz

$$\Phi = \frac{K}{4}\left[-\varrho^2(1+v^2) + a_0\varrho_0^2 + \frac{a_3}{\varrho_0}\Phi_{g,3} + \frac{a_4}{\varrho_0^2}\Phi_{g,4} + \frac{a_5}{\varrho_0^3}\Phi_{g,5} + \frac{a_6}{\varrho_0^4}\Phi_{g,6} - \frac{a_b}{7\varrho_0^5}\Phi_{g,7}\right]$$

erhält man zur Erfüllung der Bedingungen (3,2), (3,3) und (3,4) durch Koeffizientenvergleich in den v-Potenzen 5 Gleichungen mit 5 Unbekannten, woraus sich für die Koeffizienten ergeben:

$$a_0 = \frac{208}{175}, \qquad a_4 = \frac{3}{10}, \qquad a_6 = \frac{1}{5}, \qquad a_3 = -\frac{1}{5}, \qquad a_5 = -\frac{23}{50}.$$

Hieraus erhält man für die maximale Schubspannung und das Torsionsmoment

$$\tau_{max} = \frac{27}{40} K\varrho_0,$$

$$M_t = \frac{588}{525} K\varrho_0^4$$

oder

$$\tau_{max} = 4{,}82\,\frac{M_t}{Fb}$$

mit F als Querschnittsfläche und b als Seitenlänge des Quadrats gegenüber einem Faktor von 4,81, der sich aus der *Fourier*-Reihenmethode ergibt.

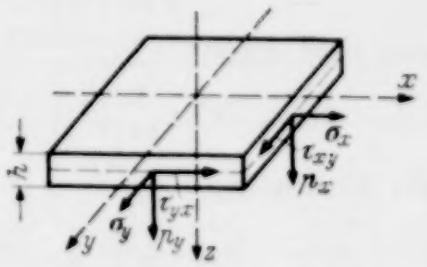


Abb. 7. Definition der Spannungen am Plattenelement.

b) Die quadratische dünne Platte mit konstanter Belastung (Abb. 7). Die Differentialgleichung der dünnen Platte mit konstanter Belastung p_0 lautet

$$\Delta\Delta w = \frac{p_0}{N} = K, \tag{3,5}$$

wenn w die Durchbiegungen bedeutet, N die Plattenkonstante

$$N = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

mit h als Plattendicke, E Elastizitätsmodul und ν als Querkontraktionszahl.

Für die Berechnung der Spannungen und Querkräfte gelten die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= m_x \frac{12\,z}{h^3}, \quad m_x = -N\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \quad p_x = -N \frac{\partial}{\partial x} \Delta w, \\ \sigma_y &= m_y \frac{12\,z}{h^3}, \quad m_y = -N\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \quad p_y = -N \frac{\partial}{\partial y} \Delta w, \\ \tau_{xy} &= m_{xy} \frac{12\,z}{h^3}, \quad m_{xy} = -(1-\nu) N \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{3,6}$$

α) Für die an allen Rändern frei aufliegende dünne Platte konstanter Belastung gelten die Randbedingungen (Bereich I)

$$w = 0, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{für} \quad \varrho = \varrho_0. \tag{3,7}$$

Als Zusatzbedingung soll noch die Stetigkeit der Spannungen an den Diagonalen, was mit der Forderung $(\sigma_x)_{v=1} = (\sigma_y)_{v=1}$ gleichbedeutend ist, erzielt werden, oder auch

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \text{für} \quad v = 1. \tag{3,8}$$

Weiterhin sei zusätzlich das Verschwinden der Querkräfte im Nullpunkt gefordert, d. h. $q_x = q_y = 0$ für $\varrho = 0$. Mit dem Ansatz

$$w = \frac{K}{64}\left[\varrho^4 (1+v^2)^2 + a_0 \varrho_0^4 + b_0 \varrho_0^2 \Psi_{g,0} + \frac{b_3}{\varrho_0} \Psi_{g,3} + a_4 \Phi_{g,4} + \frac{a_5}{\varrho_0} \Phi_{g,5}\right]$$

erhält man zur Erfüllung von (3,7) und (3,8) durch Koeffizientenvergleich in v 6 Gleichungen mit 5 Unbekannten. Die überzählige Gleichung wird dabei von selbst erfüllt. Das Ergebnis lautet

$$a_0 = \frac{24}{5}, \quad b_0 = -\frac{16}{3}, \quad b_3 = \frac{1}{3}, \quad a_4 = 1, \quad b_5 = \frac{1}{5},$$

und man erhält für die maximale Durchbiegung

$$w_{max} = 0{,}00469 \frac{p_0 b^4}{N}$$

(statt des Faktors 0,00406 nach der Rechnung mit *Fourier*-Reihen).

β) Analog erhält man für die an allen Rändern eingespannte Platte mit den Randbedingungen

$$w = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{für} \quad \varrho = \varrho_0 \tag{3,9}$$

und den Zusatzbedingungen

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \text{für} \quad v = 1, \quad q_x = q_y = 0 \quad \text{für} \quad \varrho = 0 \tag{3,10}$$

und dem Ansatz

$$w = \frac{K}{64}\left[\varrho^4 (1+v^2)^2 + a_0 \varrho_0^4 + b_0 \varrho_0^2 \Psi_{g,0} + \frac{b_3}{\varrho_0} \Psi_{g,3} + a_4 \Phi_{g,4} + \frac{a_5}{\varrho_0} \Phi_{g,5}\right]$$

die Koeffizienten

$$a_0 = \frac{8}{5}, \quad b_0 = -\frac{8}{3}, \quad b_3 = \frac{2}{3}, \quad a_4 = -1, \quad a_5 = \frac{2}{5}$$

und

$$w_{max} = 0{,}00156 \frac{p_0 b^4}{N}$$

(statt des Faktors 0,00128 nach der Näherungsrechnung mit *Fourier*-Reihen).

Die hier auftretenden Differenzen sind auf die Unstetigkeit der Querkräfte q_x, q_y an den Diagonalen zurückzuführen, womit auch das Gleichgewicht gestört wird. Hierüber wird am Schluß der Arbeit noch einiges gesagt.

Es sei hier besonders erwähnt, daß die angegebenen Lösungen eindeutig sind, da die Auflösung des Koeffizientenschemas für eine Erweiterung des Ansatzes mit Potential- und Bipotentialfunktionen die Koeffizienten dieser Funktionen exakt zu Null macht. Weiterhin sei bemerkt,

daß, wie man leicht allgemein zeigen kann, die Stetigkeitsforderung der zweiten Ableitungen die Stetigkeit der ersten Ableitungen nach sich zieht. Mit Hilfe der Differentiationsformeln (2,11) lassen sich leicht die Spannungen und nach *Mohr* die Hauptspannungen nach Größe und Richtung bestimmen. Es ergeben sich die Trajektorienbilder Abb. 8 und 9.

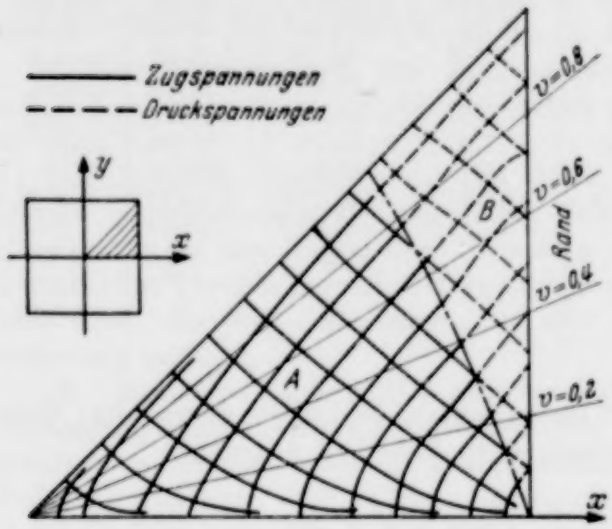


Abb. 8. Spannungstrajektorien der an allen Rändern frei aufliegenden Platte für $z > 0$.

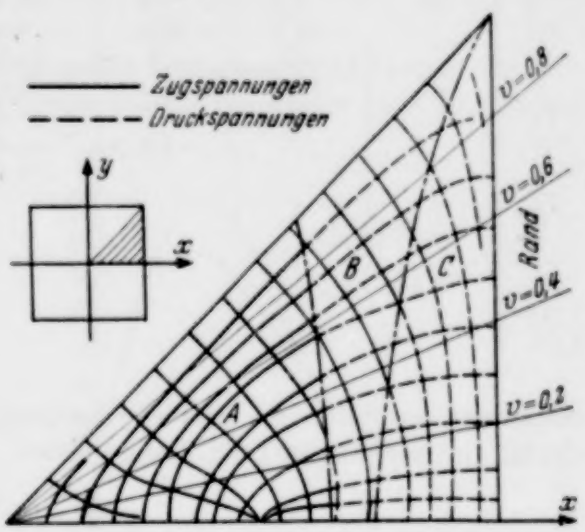


Abb. 9. Spannungstrajektorien der an allen Rändern eingespannten Platte für $z > 0$.

4. Die allseitig eingespannte dünne Platte mit einer Lastfunktion als Potenzreihe achten Grades in ϱ. Die Lastfunktion sei gegeben in der Form

$$p = p_0 \sum_{n=0}^{8} c_n \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^n . \tag{4,1}$$

Dann lautet der Ansatz für die Lösung der Differentialgleichung

$$W = \frac{K}{b!}\Big[30\, c_0\, \varrho_4^0 + 6\, c_1 \frac{\varrho^5}{\varrho_0} + 2\, c_2 \frac{\varrho^6}{\varrho_0^2} + \frac{6}{7} c_3 \frac{\varrho^7}{\varrho_0^3} + \frac{3}{7} c_4 \frac{\varrho^8}{\varrho_0^4} + \frac{5}{21} c_5 \frac{\varrho^9}{\varrho_0^5} +$$
$$+ \frac{1}{7} c_6 \frac{\varrho^{10}}{\varrho_0^6} + \frac{1}{11} c_7 \frac{\varrho^{11}}{\varrho_0^7} + \frac{2}{33} c_8 \frac{\varrho^{12}}{\varrho_0^8} + \frac{K}{6!}\Big| a_0\, \varrho_0^4 + \sum_{n=4}^{13} \frac{a_n}{\varrho_0^{n-4}} \Phi g, n +$$
$$+ b_0\, \varrho_0^2\, \Psi g, o + \sum_{n=2}^{11} \frac{b_n}{\varrho_0^{n-2}}\, \Psi g, n \Big| = W_1 + \frac{K}{6!}\Big| \cdots\cdots\cdots \Big| \Big] .$$

Das sich nach Einsetzen der Stetigkeitsbedingung (3,10) ergebende Gleichungssystem ist in Tabelle 1a und 1b angegeben.

Tabelle 1a. *Koeffizientenschema der linken Seite des Gleichungssystems.*

	a_0	b_0	a_4	b_3	b_4	b_5	a_8	b_1	b_8	b_6	a_{12}	a_{13}	b_{11}
I	1	1	1	8/5	1	2/7	1	16/9	1	2/11	1	1	1
II		2	4	8	6	2	8	16	10	2	12	13	13
III		1	— 6	— 8	— 5	6	—28	—48	—21	10	—66	—78	—54
IV			—12	—24	—20	30	—168	—336	—216	90	—660	—858	—594
V			1		— 5	—30	—70	112	42	—180	495	715	275
VI					—10	—90	280	560	252	—1260	3960	6435	2475
VII					1	10	—28	—112/3	42	420	—924	—1716	—132
VIII						10	—56	—112	168	2100	—5544	—12012	—924
IX							1		—27	—210	495	1287	—297
X									—54	—630	1980	6435	—1485
XI									1	18	—66	—858	462
XII										18	—132	—858	462
XIII											1	13	—11
XIV												13	—11

Wie man erkennt, ist die Auflösung des Gleichungssystems sukzessive möglich. Es kann sich im Verlauf der Rechnung höchstens um die Auflösung von zwei Gleichungen mit zwei Un-

Tabelle 1b. *Koeffizientenschema der rechten Seite des Gleichungssystems.*

	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8
I	15	15/2	9/4	27/28	13/28	25/112	31/224	31/352	157/2640
II	60	75/2	27/2	27/4	26/7	225/112	155/112	31/32	157/220
III		−30/2	−15/4	−9/4	−1/2	15/28	45/224	5/32	1/20
IV		−45	−15	−45/4	−3	−15/4	−45/28	−45/32	−1/2
V	15	15/2	15/4	15/4		−15/8	−15/16	−15/16	−3/16
VI		15/2	15/2	45/4		−75/8	−45/8	−105/16	−3/2
VII			−1/4	−3/4	1/2	5/4	15/16	21/16	
VIII				−3/4	1	15/4	15/4	105/16	
IX					−1/28	−15/112	−45/224	−15/32	3/16
X						−15/112	−45/112	−45/32	3/4
XI							1/224	1/32	1/20
XII								1/32	−1/10
XIII									1/880
XIV									

bekannten handeln. Es sind 14 Gleichungen mit 13 Unbekannten, so daß die überzählige Gleichung als Rechenkontrolle dienen kann. Das Ergebnis ist in Tabelle 2 angegeben.

Tabelle 2.

	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8
a_0	18	7,142857	2,761904	1,2	0,485714	0,164072	−0,117396	−0,364635	−0,658407
b_0	−30	−10,142860	−3,428571	−1,285714	−0,380952	−0,012059	0,328386	0,638528	1,028571
a_1	−15	−3,75		0,75	1	0,982143	1,178571	1,458333	1,933333
b_3	7,5	−1,5625	−1,875	−1,6875	−1,583333	−1,346726	−1,508928	−1,822916	−2,416667
b_4		1,875	1,5	1,125	1	0,758929	0,910714	1,1875	1,70
b_5		−0,281250	−0,1875	−0,093750	−0,125	−0,0379464	−0,120536	−0,234375	−0,425
a_8					0,0357143	0,0558036	−0,0133929	−0,078125	−0,175
b_7		−0,0251116	−0,0167411	−0,0150670	−0,0200893	−0,^{2}597895	0,0193718	−0,0376674	0,0683036
b_8						−0,^{2}558035	−0,0111607	−0,0130208	−0,0208333
b_9						0,^{2}465030	0,^{2}558036	−0,^{2}651042	0,^{3}104167
a_{10}									−0,^{2}113636
a_{13}						0,4268286	0,4321944	0,4626002	0,^{2}220352
b_{11}						0,^{3}317066	0,^{3}380479	0,^{3}739820	0,^{2}260417

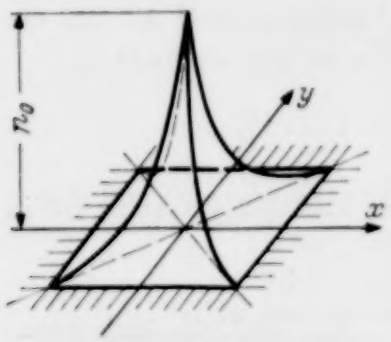


Abb. 10. Die Belastungsfunktion

$$p = p_0 \left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^3 .$$

$a_5 = \frac{3}{2} c_1 + \frac{3}{5} b_3 ,$	$a_9 = \frac{5}{336} c_5 + \frac{7}{9} b_7 ,$	$b_2 = -15\, c_0 ,$
$a_6 = \frac{1}{4} c_2 ,$	$a_{10} = \frac{1}{224} c_6 ,$	$b_6 = \frac{1}{28} c_4 ,$
$a_7 = \frac{3}{28} c_3 - \frac{5}{7} b_5 ,$	$a_{11} = \frac{1}{352} c_7 - \frac{9}{11} b_9 ,$	$b_{10} = -\frac{1}{880} c_8 .$

Aus der Anzahl der möglichen Kombinationen sei hier nur noch ein instruktives Beispiel herausgegriffen. Die Belastung p sei in der Form gegeben (Abb. 10)

$$p = p_0 \left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^3 .$$

Die Konstanten lassen sich aus Tabelle 2 berechnen, worauf hier verzichtet werden soll. Es soll hier vielmehr die Gleichgewichtsbedingung bzw. die Querkraftstetigkeit an den Diagonalen geprüft werden. Für die Auflast p erhält man allgemein das Integral

$$P_A = 2 \int_{-\varrho_0}^{+\varrho_0} \varrho\, p(\varrho)\, d\varrho$$

und für das Integral der Querkräfte am Rand $\varrho = \varrho_0$

$$P_Q = \int_{-\varrho_0}^{+\varrho_0} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta w_1\right)_{x=\varrho_0} dy + 8 \sum_{\lambda>1} \frac{b_\lambda (\lambda+1)}{\varrho_0^{\lambda-2}} (\Phi_{u,\lambda})_{\substack{\varrho=\varrho_0 \\ v=1}} .$$

Die Gleichgewichtsforderung lautet nun

$$P_A = P_Q .$$

Für den oben angeführten Fall erhält man

$$P_a = 0{,}1\, p_0\, \varrho_0^2\,, \qquad P_Q = 0{,}105\, p_0\, \varrho_0^2\,.$$

Die unwesentliche Differenz zwischen P_a und P_Q läßt erwarten, daß auch die Querkräfte q_x und q_y eine gute Übereinstimmung aufweisen werden. In Abb. 11 sind beide Kurven gezeichnet und bestätigen die Vermutung.

5. Schlußbetrachtung. Die zunächst durchgeführten recht einfachen Rechnungen an den schon bekannten Plattenproblemen haben gezeigt, daß man hierbei qualitativ gute Ergebnisse erzielen kann.

Das Problem besteht weiterhin darin, auch der letzten physikalischen Bedingung der Stetigkeit der Querkräfte an den Diagonalen Rechnung zu tragen. Im Abschn. 4 wurde gezeigt, daß es auch gewisse Lastfälle gibt, die dieser Bedingung in sehr guter Annäherung genügen.

Man kann nun auch in allen anderen Fällen dieser Bedingung zumindestens punktweise oder im Mittel genügen, wenn man dafür die Lastfunktion durch ein Polynom annähert. Alle anderen Bedingungen werden dabei beibehalten. Die bisher Erfolg versprechenden Ergebnisse dieser Rechnung sollen einer folgenden Arbeit vorbehalten bleiben.

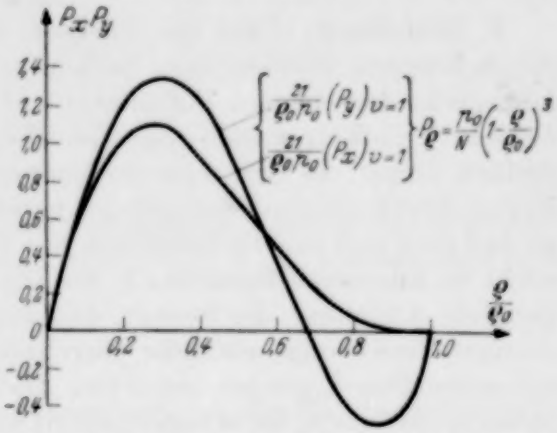


Abb. 11. Darstellung der Querkräfte q_x, q_y für $\nu = 1$

Es sei hier noch bemerkt, daß es auch möglich ist, Lastverteilungen der Form

$$p = p_0 \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^n \ln \frac{\varrho}{\varrho_0} \quad (n \geq 0)$$

zu rechnen, so daß man eine ganze Reihe von Überlagerungsmöglichkeiten zur Erfüllung der Stetigkeit der Querkräfte zur Verfügung hätte.

Was neben der leichten Auflösung der Gleichungssysteme noch besonders zu erwähnen wäre, ist die Tatsache, daß eine Änderung der Belastungsfunktion lediglich die rechten Seiten des Gleichungssystems (Tab. Ib) ändert. Wenn man also einmal den Rechengang zur Auflösung des Systems (Tab. Ia) schematisch festgelegt hat, liegt es auch für die rechten Seiten fest und kann unter Zuhilfenahme einer Rechenmaschine schnell erledigt werden.

Diese Methode ist nun weiterhin auf eine unendlich ausgedehnte Scheibe mit quadratischem Loch und symmetrischer Belastung mit Erfolg angewendet worden, wofür die Potential- und Bipotentialfunktionen verwandt wurden, die ihren Pol im Nullpunkt haben. Dieses Problem wird eine spätere Arbeit von *H. Montag* behandeln.

Die vorliegende Arbeit ist 1951 am Institut für Mechanik der Techn. Hochschule Aachen als Habilitationsschrift entstanden.

(Eingegangen am 26. September 1950.)

Anschrift des Verfassers: Dozent Dr. *Th. Schade*, Würselen bei Aachen, Kaiserstr. 69.

Die achsensymmetrisch belastete dicke Kreisplatte auf elastischer Unterlage.

Von I. Szabó.

1. Einleitung. Über das Problem der Bestimmung der Druckverteilung in und unter elastischen Trägern, insbesondere Balken und Platten, auf elastischer Unterlage ist seit *Zimmermann*[1] eine große Anzahl von Publikationen[2] erschienen. Jeder dieser Arbeiten (soweit dem Verfasser bekannt), enthält mindestens eine der folgenden drei Einschränkungen: 1. Der Träger ist „unendlich dünn", so daß seine Deformation beim Balken durch die Verbiegung der Achse, bei der Platte durch die der Mittelebene beschrieben werden kann; 2. der Träger ist „unendlich lang", so daß man sich um die Erfüllung der Spannungs- und Deformationsbedingungen an den Rändern nicht zu kümmern braucht; 3. die sog. Zimmermannsche, in Wirklichkeit auf *Winkler*[3] zurückgehende Annahme, die besagt, daß die Einsenkung der Unterlage und somit, bei Voraussetzung stetiger Berührung, auch die Durchbiegung des Trägers an der Berührungsstelle dem dort herrschenden Druck proportional ist. Daß uns diese Annahmen mehr oder weniger von der Wirklichkeit entfernen, ist offensichtlich: Ein Schornsteinfundament von 2 m Dicke und 12 m Durchmesser ist weder „unendlich dünn" noch unendlich lang, und auch gegen die unter 3. angeführte Hypothese läßt sich der Einwand anführen, daß die Einsenkung an einer Stelle nicht nur von dem örtlichen Druck, sondern von allen von der Unterlage aufzunehmenden Lasten abhängen muß.

2. Problemstellung. Eine Kreisplatte vom Halbmesser a, der Höhe h, Schubmodul G und der *Poisson*schen Zahl ν ist in der Ebene $z = 0$ durch die achsensymmetrische Spannung $\sigma = f(r)$ belastet und liegt in der Ebene $z = h$ auf dem elastischen Halbraum vom Schubmodul G_1 und

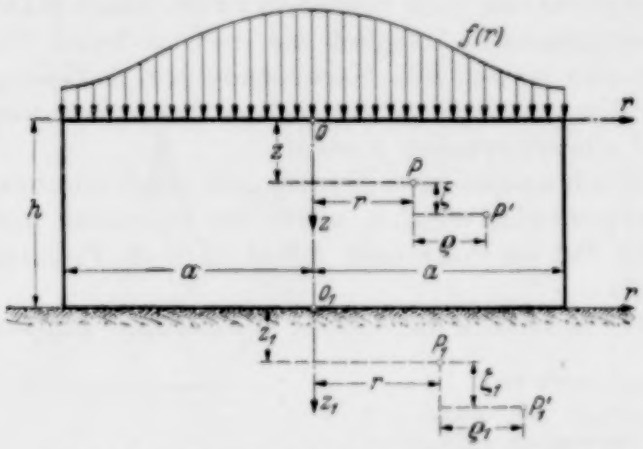


Abb. 1. Rotationssymmetrisch belastete Kreisplatte auf elastischem Halbraum.

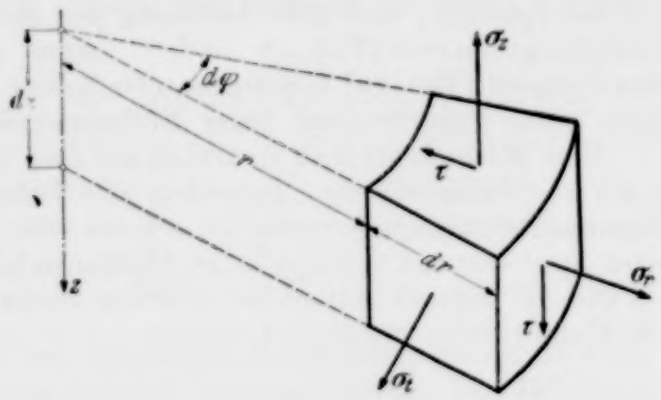


Abb. 2. Volumenelement der Platte bzw. Unterlage.

der *Poisson*schen Zahl ν_1 (Abb. 1). Gesucht sind unter Zugrundelegung der *Hooke*schen Gesetze die zur Charakterisierung des Formänderungs- und Belastungszustandes notwendigen Verschiebungen $\varrho = \varrho(z, r)$, $\zeta = \zeta(z, r)$ für die Platte bzw. $\varrho_1 = \varrho_1(z, r)$, $\zeta_1 = \zeta_1(z_1, r)$ für die Unterlage (Abb. 1) und die Spannungen σ_z, σ_t, σ_r bzw. σ_{1z}, σ_{1t}, σ_{1r} (Abb. 2). Die nunmehr zu formulierenden Randbedingungen werden in der linearisierten Elastizitätslehre üblicherweise für den unverformten Zustand unter den Voraussetzungen aufgestellt, daß 1. die Platte in jedem Punkte ihrer Grundfläche ($z = h$) mit der Unterlage in Kontakt bleibt, wodurch freilich der Lösung nur solange eine physikalische Realität zukommt, als zwischen Platte und Unterlage Druckkräfte auftreten (was bei den üblichen Belastungsarten meist der Fall sein wird), und 2. daß die Oberfläche des Halbraumes vollkommen glatt ist, so daß sie dort keine Schubspannung aufzunehmen vermag. (Die Berücksichtigung derselben erfolgt in einer dieser bald folgenden

[1] *H. Zimmermann*, Die Berechnung des Eisenbahnoberbaues. Berlin 1888.
[2] S. z. B. *E. Pflanz*, Ing.-Arch. 12 (1941) S. 201 und die dort angeführte Literatur.
[3] *E. Winkler*, Die Lehre von Elastizität und Festigkeit. Prag 1867.

Mitteilung.) Unter Zugrundelegung der in Abb. 1 gezeichneten Koordinatensysteme sind dann folgende Randbedingungen zu erfüllen:

I. Für $z = 0$ und alle $r \leq a$ ist

$$\sigma_z = -f(r) = \sigma_z(o, r)\,, \tag{1}$$

$$\tau = 0 = \tau(0, r)\,. \tag{2}$$

II. Für $z = h$ bzw. $z_1 = 0$ ist

$$\tau(h, r) = 0 \qquad \text{für } r \leq a\,, \tag{3}$$

$$\tau_1(0, r) = 0 \qquad ,, \quad \text{alle } r\,, \tag{4}$$

$$\zeta_1(0, r) = \zeta(h, r) \qquad ,, \quad r \leq a\,, \tag{5}$$

$$\sigma_{1z}(0, r) = \begin{cases} \sigma_z(h, r) & ,, \quad r \leq a \\ 0 & ,, \quad r > a \end{cases} \tag{6}$$

III. Für $r = a$ und alle $0 \leq z \leq h$ ist

$$\tau = 0 = \tau(z, a)\,, \tag{7}$$

$$\sigma_r = 0 = \sigma_r(z, a)\,. \tag{8}$$

Daß die Randbedingung (5) im Sinne der linearisierten Elastizitätslehre zulässig ist, zeigt man folgendermaßen: Streng genommen ist $\zeta(h, r) = \zeta_1(0, r_1)$ und $r + \varrho = r_1 + \varrho_1$, woraus nach dem *Taylor*schen Satz

$$\zeta(h, r) = \zeta_1(0, r + \varrho - \varrho_1) = \zeta_1(0, r) + \frac{d\zeta_1}{dr}(\varrho - \varrho_1) + \ldots$$

folgt, und da $\varrho - \varrho_1$ und $d\zeta_1/dr$ kleine Größen erster Ordnung sind, ist die Randbedingung (5) bis auf kleine Größen höherer Ordnung richtig.

Mit der Abkürzung für die Gesamtdehnung

$$\varepsilon = \frac{\varrho}{r} + \frac{\partial \varrho}{\partial r} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \tag{9}$$

sind die Spannungen bekanntlich[1] durch

$$\begin{aligned} \sigma_z &= 2G\left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\nu\varepsilon}{1-2\nu}\right), \qquad \tau = G\left(\frac{\partial \varrho}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial r}\right) \\ \sigma_r &= 2G\left(\frac{\partial \varrho}{\partial r} + \frac{\nu\varepsilon}{1-2\nu}\right), \qquad \sigma_t = 2G\left(\frac{\varrho}{r} + \frac{\nu\varepsilon}{1-2\nu}\right) \end{aligned} \tag{10}$$

gegeben, während die Gleichgewichtsbedingungen ohne die Berücksichtigung der Massenkräfte (worüber bei einer anderen Gelegenheit berichtet werden soll) das Bestehen der Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} + \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0\,, \qquad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\tau}{\varrho} = 0 \tag{11}$$

fordern. Durch Eliminationsprozesse[2] bekommt man aus (9) bis (11) die beiden Differentialgleichungen

$$(1 - 2\nu)\,\Delta\zeta + \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = 0 \tag{12}$$

und

$$(1 - 2\nu)\left(\Delta\varrho - \frac{\varrho}{r^2}\right) + \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = 0\,, \tag{13}$$

wobei $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$ den *Laplace*schen Operator bedeutet.

3. Bestimmung der Verschiebungen für die Platte. Aus (9) gewinnt man durch Differentiation

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial \varrho}{\partial z} - \frac{\partial^2 \varrho}{\partial r\,\partial z}$$

und somit

$$\Delta\zeta = \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \varrho}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial r}\right) - \frac{\partial^2 \varrho}{\partial r\,\partial z} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2}\,. \tag{14}$$

Wir führen ein

$$s = \frac{\partial \varrho}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial r}\,, \tag{15}$$

[1] S. z. B. Handbuch der Physik, Bd. VI, S. 81.

[2] *Á. Nádai*, Elastische Platten, S. 310.

woraus

$$\frac{\partial s}{\partial r} = \frac{\partial^2 \varrho}{\partial r\, \partial z} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2}, \qquad \frac{\partial s}{\partial z} = \frac{\partial^2 \varrho}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r\, \partial z} \tag{16}$$

folgt. Setzt man (15) und (16) in (14) und den so erhaltenen Wert für $\Delta\zeta$ in (12) ein, so ergibt sich

$$2\,(1-\nu)\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = (1-2\,\nu)\left(\frac{s}{r} + \frac{\partial s}{\partial r}\right). \tag{17}$$

Ebenfalls aus (9) fließt die Beziehung

$$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varrho}{\partial r} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + \frac{\varrho}{r^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r\, \partial z},$$

die mit (16)

$$\Delta \varrho = \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + \frac{\varrho}{r^2} + \frac{\partial s}{\partial z}$$

liefert, womit aus (13)

$$2\,(1-\nu)\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + (1-2\,\nu)\frac{\partial s}{\partial z} = 0 \tag{18}$$

hervorgeht. Mit Hilfe der aus (17) und (18) ermittelten $\partial\varepsilon/\partial z$ und $\partial\varepsilon/\partial r$ erhalten wir schließlich die bekannte Beziehung

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r^2} = \Delta\varepsilon = 0. \tag{19}$$

Errechnet man hingegen aus (17) und (18) $\partial s/\partial z$ und $\partial s/\partial r$, so kommen wir zu

$$\frac{\partial^2 s}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial r} + \frac{\partial^2 s}{\partial r^2} = \Delta s = \frac{1}{r}\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\,\nu}\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - \frac{\partial s}{\partial r}\right] = \frac{s}{r^2},$$

d. h.

$$\Delta s - \frac{s}{r^2} = 0. \tag{20}$$

Der erste Schritt zur Ermittlung der Verschiebungen ζ und ϱ ist die Lösung der Differentialgleichungen (19) und (20). Der Produktansatz

$$\varepsilon = R(r)\,Z(z) \quad \text{bzw.} \quad s = R(r)\,Z(z)$$

führt aus (19) und (20) mit willkürlichem λ^2 auf die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$r^2 R''(r) + rR'(r) + \lambda^2 r^2 R(r) = 0; \qquad Z''(z) - \lambda^2 Z(z) = 0$$

bzw.

$$r^2 R''(r) + rR'(r) + (\lambda^2 r^2 - 1)\,R(r) = 0; \qquad Z''(z) - \lambda^2 Z(z) = 0,$$

deren für $r = 0$ regulär bleibende Lösungen $J_0(\lambda r)$, $e^{\pm \lambda z}$ bzw. $J_1(\lambda r)$ und $e^{\pm \lambda z}$ sind, so daß wir für ε bzw. s die partikulären Lösungen

$$\varepsilon = \left(p\,e^{-\lambda z} + q\,e^{\lambda z}\right) J_0(\lambda r) \tag{21}$$

bzw.

$$s = \left(K_1 e^{-\lambda z} + K_2 e^{\lambda z}\right) J_1(\lambda r) \tag{22}$$

bekommen; hierbei bedeuten p, q, K_1, K_2 willkürliche Konstanten und $J_0(\lambda r)$ und $J_1(\lambda r)$ die *Bessel*schen Funktionen erster Art. Das Bestehen der Gleichung (18) ergibt wegen der bekannten Beziehung

$$\frac{dJ_1(\lambda r)}{dr} = \lambda J_1'(\lambda r) = -\frac{1}{r} J_1(\lambda r) + \lambda J_0(\lambda r), \tag{23}$$

daß

$$K_1 = -\frac{2(1-\nu)}{1-2\,\nu}\,p; \qquad K_2 = \frac{2(1-\nu)}{1-2\,\nu}\,q$$

sein muß, und man zeigt leicht, daß die an Stelle von (22) tretende Lösung

$$s = -\frac{2(1-\nu)}{1-2\,\nu}\left(p\,e^{-\lambda z} - q\,e^{\lambda z}\right) J_1(\lambda r) \tag{24}$$

mit (21) der Gleichung (17) ebenfalls genügt. Jetzt können wir zur Bestimmung der Verschiebungen übergehen.

Aus (12) folgt mit (21) die inhomogene Differentialgleichung

$$\Delta\zeta = -\frac{\lambda}{1-2\nu}\left(-pe^{-\lambda z}+qe^{\lambda z}\right)J_0(\lambda r) \tag{25}$$

für ζ. Der homogene Teil $\Delta\zeta = 0$ hat — entsprechend (19) und (21) — mit willkürlichem P und Q die Lösung

$$\zeta = \left(Pe^{-\lambda z}+Qe^{\lambda z}\right)J_0(\lambda r)\,,$$

während der Ansatz

$$\zeta = \left(A_1e^{-\lambda z}+A_2e^{\lambda z}\right)zJ_0(\lambda r)+Az+B$$

für eine partikuläre Lösung von (25) mit den neuen Konstanten A_1, A_2, A und B wegen $J_0'(\lambda r) = -J_1(\lambda r)$ auf

$$\Delta\zeta = 2\lambda\left(-A_1e^{-\lambda z}+A_2e^{\lambda z}\right)J_0(\lambda r) = -\frac{\lambda}{1-2\nu}\left(-pe^{-\lambda z}+qe^{\lambda z}\right)J_0(\lambda r)$$

führt, woraus

$$A_1 = -\frac{p}{2(1-2\nu)}\,, \qquad A_2 = -\frac{q}{2(1-2\nu)}$$

und somit nach Superposition der beiden Lösungen

$$\zeta = -\frac{z}{2(1-2\nu)}\left(pe^{-\lambda z}+qe^{\lambda z}\right)J_0(\lambda r)+\left(Pe^{-\lambda z}+Qe^{\lambda z}\right)J_0(\lambda r)+Az+B \tag{26}$$

folgt.

Die Ermittlung von ϱ gestaltet sich etwas mühsamer. Unter Berücksichtigung von (15), (9), (18) und (24) erhält man aus (13) zunächst

$$\Delta\varrho-\frac{\varrho}{r^2} = \frac{1}{2(1-\nu)}\frac{\partial s}{\partial z} = \frac{\lambda}{1-2\nu}\left(pe^{-\lambda z}+qe^{\lambda z}\right)J_1(\lambda r) \tag{27}$$

wieder eine inhomogene Differentialgleichung für ϱ. Die homogene Gleichung $\Delta\varrho-\varrho/r^2 = 0$ hat mit den beliebigen Konstanten B_1 und B_2 analog zu (20) die Lösung

$$\varrho = \left(B_1e^{-\lambda z}+B_2e^{\lambda z}\right)J_1(\lambda r)\,, \tag{28}$$

während der Ansatz

$$\varrho = \left(D_1e^{-\lambda z}+D_2e^{\lambda z}\right)zJ_1(\lambda r) \tag{29}$$

in (27) gesetzt nach einigen Zwischenrechnungen zu

$$D_1 = -\frac{p}{2(1-2\nu)}\,, \qquad D_2 = \frac{q}{2(1-2\nu)}$$

führt. Nach Einsetzen von D_1 und D_2 und Superposition der beiden Lösungen (28) und (29) entsteht

$$\varrho = -\frac{z}{2(1-2\nu)}\left(pe^{-\lambda z}-qe^{\lambda z}\right)J_1(\lambda r)+\left(B_1e^{-\lambda z}+B_2e^{\lambda z}\right)J_1(\lambda r)\,. \tag{30}$$

Die Konstanten B_1 und B_2 lassen sich auf p und q bzw. P und Q zurückführen, wenn man beachtet, daß ϱ so gebaut sein muß, daß die Gleichungen (9) und (15) bestehen: Aus (15) ergibt sich mit (24), (26) und (30)

$$B_1 = P+\frac{(3-4\nu)p}{2(1-2\nu)\lambda}\;; \qquad B_2 = -Q+\frac{(3-4\nu)q}{2(1-2\nu)\lambda}\,,$$

und man kann zeigen, daß die mit diesen Werten aus (30) hervorgehende Lösung

$$\begin{aligned}\varrho = -\frac{z}{2(1-2\nu)}\left(pe^{-\lambda z}-qe^{\lambda z}\right)J_1(\lambda r)+\Bigg\{\left[P+\frac{(3-4\nu)p}{2(1-2\nu)\lambda}\right]e^{-\lambda z}+\\ +\left[-Q+\frac{(3-4\nu)q}{2(1-2\nu)\lambda}\right]e^{-\lambda z}\Bigg\}J_1(\lambda r)\end{aligned} \tag{31}$$

zusammen mit ζ nach (26) der Gleichung (9) ebenfalls genügt.

Damit sind gemäß (26) und (31) gewisse (spezielle) Lösungen gefunden, von denen aber von vornherein noch keinesfalls erwartet werden kann, daß man die in ihnen vorkommenden Konstanten p, q, P, Q, A, B und λ so wählen kann, daß die dadurch entstehenden Lösungen allen Randbedingungen gerecht werden; zur Klärung dieser Frage gehen wir jetzt dazu über, unter Heranziehung der Randbedingungen für die Platte, die Konstanten bzw. einige von ihnen zu bestimmen.

Die Forderung (7) (verschwindende Schubspannung auf dem freien Plattenmantel) führt mit Hilfe von (26) und (31) aus (10) auf $J_1(\lambda a) = 0$; also die Eigenwerte $\lambda = \lambda_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ sind durch die unendlich vielen, reellen und positiven Nullstellen von $J_1(t) = 0$ bestimmt: Aus $J_1(t_k) = 0$ folgt $\lambda_k = \frac{t_k}{a}$, wobei die t_k z. B. aus dem Tafelwerk *Jahnke-Emde* entnommen werden können. Durch Superposition der so entstehenden Eigenfunktionen treten an Stelle von (26) und (31) die Lösungen

$$\zeta = -\frac{z}{2(1-2\nu)}\sum_{k=1}^{\infty}\left(p_k e^{-\lambda_k z} + q_k e^{\lambda_k z}\right) J_0(\lambda_k r) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(P_k e^{-\lambda_k z} + Q_k e^{\lambda_k z}\right) J_0(\lambda_k r) + A z + B \tag{32}$$

und

$$\varrho = -\frac{z}{2(1-2\nu)}\sum_{k=1}^{\infty}\left(p_k e^{-\lambda_k z} - q_k e^{\lambda_k z}\right) J_1(\lambda_k r) + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[P_k + \frac{(3-4\nu)\,p_k}{2(1-2\nu)\,\lambda_k}\right] e^{-\lambda_k z} + \left[-Q_k + \frac{(3-4\nu)\,q_k}{2(1-2\nu)\lambda_k}\right] e^{\lambda_k z}\right\} J_1(\lambda_k r)\,. \tag{33}$$

(Der in (33) auftretende physikalische Widerspruch, daß nämlich $\varrho\,(a, z) \equiv 0$ ist, wird noch eine Erklärung dahingehend finden, daß diese Funktionen für ζ und ϱ nicht mehr genug frei wählbare Elemente haben, um allen noch nicht erfüllten Randbedingungen gerecht zu werden; d. h. (33) ist noch nicht die „richtige" Lösung für ϱ.)

Mit (32) und (33) können wir weitere Randbedingungen der Platte realisieren. Die Lastbedingung (1) liefert mit (10)

$$2G\left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\nu\varepsilon}{1-2\nu}\right)_{z=0} = -f(r)\,,$$

woraus mit (9), (32) und (33)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{p_k}{2} - \frac{q_k}{2} - \lambda_k P_k + \lambda_k Q_k\right) J_0(\lambda_k r) + A\,\frac{1-\nu}{1-2\nu} = -\frac{f(r)}{2G}$$

folgt. Multiplizieren wir diese Gleichung mit $J_0(\lambda_n r)\,r\,dr$ $(n = 1, 2, 3 \ldots)$ und integrieren von $r = 0$ bis $r = a$, so erhalten wir wegen $J_1(\lambda_k a) = 0$ und der gemäß dieser Gleichung gültigen Formeln

$$\int_0^a J_0(\lambda_n r)\,r\,dr = 0\,, \qquad \int_0^a J_0(\lambda_k r)\,J_0(\lambda_n r)\,r\,dr = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq n, \\ \frac{a^2}{2} J_0^2(\lambda_k a) & \text{für } k = n, \end{cases} \tag{34}$$

$$-\frac{p_k}{2} - \frac{q_k}{2} - \lambda_k P_k + \lambda_k Q_k = \frac{-\int_0^a f(r)\,J_0(\lambda_k r)\,r\,dr}{a^2 G J_0^2(\lambda_k a)} = c_k\,, \tag{35}$$

während sie mit $r\,dr$ multipliziert und integriert

$$A = -\frac{1-2\nu}{(1-\nu)a^2 G}\int_0^a f(r)\,r\,dr \tag{36}$$

liefert, womit A bekannt ist.

Berechnen wir mit (32) und (33) gemäß (10) die Schubspannung $\tau = \tau\,(z, r)$, so bekommen wir aus der Randbedingung (2)

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k\,(P_k + Q_k)\,J_1(\lambda_k r) - \frac{1}{2\,(1-2\nu)}\sum_{k=1}^{\infty}(p_k - q_k)\,J_1(\lambda_k r) + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{-\lambda_k\left[P_k + \frac{(3-4\nu)\,p_k}{2\,(1-2\nu)\,\lambda_k}\right] + \lambda_k\left[-Q_k + \frac{(3-4\nu)\,q_k}{2\,(1-2\nu)\,\lambda_k}\right]\right\} J_1(\lambda_k r) = 0\,,$$

woraus

$$\lambda_k\,(P_k + Q_k) + \frac{1-\nu}{1-2\nu}\,(p_k - q_k) = 0 \tag{37}$$

folgt. Die Auflösung von (35) und (37) liefert

$$2\,\lambda_k P_k = -\frac{(3-4\nu)\,p_k}{2\,(1-2\nu)} + \frac{q_k}{2\,(1-2\nu)} - c_k\,, \tag{38}$$

$$2\lambda_k Q_k = -\frac{p_k}{2(1-2\nu)} + \frac{(3-4\nu)\,q_k}{2(1-2\nu)} + c_k, \tag{39}$$

wobei die c_k nach (35) definiert und somit durch die Belastung gegeben sind.

Auf dem gleichen Wege liefert die Randbedingung (3)

$$\frac{1}{1-2\nu}\sum_{k=1}^{\infty}\left(p_k e^{-\lambda_k h} + q_k e^{\lambda_k h}\right)\lambda_k h\, J_1(\lambda_k r) - \sum_{k=1}^{\infty}\left(P_k 2\lambda_k e^{-\lambda_k h} + Q_k 2\lambda_k e^{\lambda_k h}\right) J_1(\lambda_k r) -$$

$$-\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\sum_{k=1}^{\infty}\left(p_k e^{-\lambda_k h} - q_k e^{\lambda_k h}\right) J_1(\lambda_k r) = 0,$$

woraus unter Benutzung von (38) und (39)

$$p_k(\lambda_k h\, e^{-\lambda_k h} + \mathfrak{Sin}\,\lambda_k h) + q_k(\lambda_k h\, e^{\lambda_k h} + \mathfrak{Sin}\,\lambda_k h) = 2(1-2\nu)\, c_k\, \mathfrak{Sin}\,\lambda_k h \tag{40}$$

hervorgeht. Damit können aber alle in (32) und (33) vorkommenden Konstanten mit Ausnahme von B auf eine, etwa p_k, zurückgeführt werden, d. h. zur Beschreibung des Spannungs- und Formänderungszustandes der Platte fehlen uns noch die Koeffizienten p_k und die Konstante B. Zu ihrer Bestimmung müssen wir die noch nicht realisierten Randbedingungen heranziehen und dazu benötigen wir die Verschiebungen der Unterlage.

4. Die Verschiebungen in der Unterlage (Halbraum). Da für die Verschiebungen und Spannungen des Halbraumes dieselben Differentialgleichungen gelten wie für die Platte, sind die Verschiebungen ζ_1 und ϱ_1 für die Unterlage unter Beachtung von (32) und (33) sofort hinzuschreiben: An Stelle der Summe treten im Sinne des *Laplace*schen Gedankens Integrale, während die Konstanten durch unbekannte Funktionen zu ersetzen sind; bedenken wir noch, daß für $z_1 \to \infty$ sowohl ζ_1 wie ϱ_1 verschwinden müssen, so haben wir

$$\zeta_1 = -\frac{z_1}{2(1-2\nu_1)}\int_0^{\infty}\Phi(\lambda)\, J_0(\lambda r)\, e^{-\lambda z_1}\, d\lambda + \int_0^{\infty}\Psi(\lambda)\, J_0(\lambda r)\, e^{-\lambda z_1}\, d\lambda, \tag{41}$$

$$\varrho_1 = -\frac{z_1}{2(1-2\nu_1)}\int_0^{\infty}\Phi(\lambda)\, J_1(\lambda r)\, e^{-\lambda z_1}\, d\lambda + \int_0^{\infty}\left[\Psi(\lambda) + \frac{(3-4\nu_1)\Phi(\lambda)}{2(1-2\nu_1)\lambda}\right] J_1(\lambda r)\, e^{-\lambda z_1}\, d\lambda, \tag{42}$$

wobei $\Phi(\lambda)$ und $\Psi(\lambda)$ aus den Randbedingungen zu ermittelnde Funktionen sind. Die Randbedingung (4) ergibt

$$\int_0^{\infty}\left[2\lambda\Psi(\lambda) + \frac{2(1-\nu_1)}{1-2\nu_1}\Phi(\lambda)\right] J_1(\lambda r)\, d\lambda = 0,$$

woraus die Beziehung

$$\Psi(\lambda) + \frac{(1-\nu_1)\,\Phi(\lambda)}{(1-2\nu_1)\,\lambda} = 0 \tag{43}$$

zwischen $\Psi(\lambda)$ und $\Phi(\lambda)$ folgt.

5. Die Übergangsbedingungen zwischen Platte und Unterlage und die Aufstellung eines unendlichen Gleichungssystems für die Koeffizienten p_k. Die Übergangsbedingung (6) (Gleichheit der Normalspannungen) lautet mit Rücksicht auf (10)

$$2G_1\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial z_1} + \frac{\nu_1\varepsilon_1}{1-2\nu_1}\right)_{z_1=0} = 2G\left(\frac{\partial\zeta}{\partial z} + \frac{\nu\varepsilon}{1-2\nu}\right)_{z=h},$$

wobei ε bzw. ε_1 durch (9) definiert sind, so daß wir durch Heranziehung von (32) und (33) (mit Benutzung von (38) und (39)) bzw. (41) und (42) [mit Benutzung von (43)] mit der Abkürzung

$$\mu = \frac{G}{G_1} \tag{44}$$

nach längeren Rechnungen wegen $\sigma(h, r) = 0$ für $r > a$ zu dem Ergebnis

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \left[\Psi(\lambda) + \frac{1}{2\lambda}\Phi(\lambda)\right]\lambda J_0(\lambda r)\,d\lambda &= \frac{1}{2(1-\nu_1)}\int_0^\infty \Psi(\lambda)\,\lambda J_0(\lambda r)\,d\lambda = \\ &= \begin{cases} 0 \text{ für } r > a \\ -\mu\left\{\frac{1-\nu}{1-2\nu}A + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{p_k}{2(1-2\nu)}\left(\lambda_k h e^{-\lambda_k h} - \mathfrak{Sin}\,\lambda_k h\right) - \right.\right. \\ \left.\left. - \frac{q_k}{2(1-2\nu)}\left(\lambda_k h e^{\lambda_k h} - \mathfrak{Sin}\,\lambda_k h\right) + c_k \mathfrak{Cof}\,\lambda_k h\right] J_0(\lambda_k r)\right\} \text{ für } r \le a \end{cases}\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

gelangen. Multiplizieren wir diese Gleichung mit $J_0(\vartheta r)\,r\,dr$ und integrieren von $r = 0$ bis $r = \infty$ (bzw. rechts von $r = 0$ bis $r = a$), so bekommen wir unter Benutzung der *Hankel*schen Umkehrformel

$$\int_0^\infty r J_0(\vartheta r)\,\varphi(r)\,dr = F(\vartheta), \qquad \int_0^\infty \vartheta J_0(\vartheta r)\,F(\vartheta)\,d\vartheta = \varphi(r)$$

und der Integralbeziehungen

$$\int_0^a J_0(\vartheta r)\,r\,dr = \frac{a}{\vartheta}J_1(\vartheta a), \qquad \int_0^a r J_0(\lambda_k r)\,J_0(\vartheta r)\,dr = \frac{\vartheta J_0(\lambda_k a)\,J_1(\vartheta a)}{\vartheta^2 - \lambda_k^2},$$

wenn wir nach Ausführung der Integration für ϑ wieder λ schreiben

$$\frac{\Psi(\lambda)}{2(1-\nu_1)} = -\mu\left[\lambda a J_1(\lambda a)\sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{J_0(\lambda_k a)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} + \frac{(1-\nu)Aa\,J_1(\lambda a)}{(1-2\nu)\lambda}\right], \tag{46}$$

wobei

$$C_k = \frac{p_k}{2(1-2\nu)}\left(\lambda_k h e^{-\lambda_k h} - \mathfrak{Sin}\,\lambda_k h\right) - \frac{q_k}{2(1-2\nu)}\left(\lambda_k h e^{\lambda_k h} - \mathfrak{Sin}\,\lambda_k h\right) + c_k \mathfrak{Cof}\,\lambda_k h$$

oder mit (40)

$$C_k = p_k \frac{(\lambda_k h)^2 - \mathfrak{Sin}^2\,\lambda_k h}{(1-2\nu)\left[\lambda_k h e^{\lambda_k h} + \mathfrak{Sin}\,\lambda_k h\right]} + c_k \frac{\lambda_k h + e^{\lambda_k h}\,\mathfrak{Sin}\,\lambda_k h}{\lambda_k h e^{\lambda_k h} + \mathfrak{Sin}\,\lambda_k h} \tag{47}$$

bedeutet, also lediglich von p_k abhängt.

Die Gleichheit der senkrechten Verschiebungen (Randbedingung (5)) liefert die für $r \le a$ gültige Gleichung

$$\left.\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\right. &- \frac{p_k}{2(1-2\nu)}\left[(3-4\nu+2\lambda_k h)e^{-\lambda_k h} + e^{\lambda_k h}\right] + \\ &+ \frac{q_k}{2(1-2\nu)}\left[(3-4\nu-2\lambda_k h)e^{\lambda_k h} + e^{-\lambda_k h}\right] + 2c_k\,\mathfrak{Sin}\,\lambda_k h\left.\right\}\frac{J_0(\lambda_k r)}{2\lambda_k} + \\ &+ Ah + B = \int_0^\infty \Psi(\lambda)\,J_0(\lambda r)\,d\lambda,\end{aligned}\right\} \tag{48}$$

die mit $r\,dr$ multipliziert und zwischen $r = 0$ und $r = a$ integriert zu der Beziehung

$$\int_0^\infty \Psi(\lambda)\,J_1(\lambda a)\,\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{a}{2}(Ah + B) \tag{49}$$

führt. Multiplizieren wir (46) mit $J_1(\lambda a)\,d\lambda/\lambda$ und integrieren von $r = 0$ bis $r = \infty$, so ergibt sich wegen (40)

$$Ah + B = -4\mu(1-\nu_1)\left[\sum_{k=1}^{\infty} C_k J_0(\lambda_k a)\int_0^\infty \frac{J_1^2(\lambda a)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}\,d\lambda + \frac{(1-\nu)A}{1-2\nu}\int_0^\infty \frac{J_1^2(\lambda a)}{\lambda^2}\,d\lambda\right], \tag{50}$$

während die Gleichung (48) mit $J_0(\lambda_n r)\,r\,dr$ multipliziert und von $r = 0$ bis $r = a$ integriert

$$\int_{\lambda=0}^\infty \Psi(\lambda)\int_{r=0}^a J_0(\lambda r)\,J_0(\lambda_n r)\,r\,dr\,d\lambda = \int_0^\infty \Psi(\lambda)\frac{a\lambda J_0(\lambda_n a)\,J_1(\lambda a)}{\lambda^2 - \lambda_n^2}\,d\lambda = \frac{a^2 J_0^2(\lambda_n a)}{4\lambda_n}D_n$$

oder

$$\int_0^\infty \Psi(\lambda)\frac{\lambda J_1(\lambda a)}{\lambda^2-\lambda_n^2}\,d\lambda = \frac{a J_0(\lambda a)}{4\lambda_n} D_n \tag{51}$$

liefert, wobei (nach Zurückführung aller Koeffizienten auf p_n)

$$D_n = \frac{4(1-\nu)}{\lambda_n h e^{\lambda_n h} + \operatorname{Sin}\lambda_n h}\left[-\frac{p_n}{1-2\nu}\left(\lambda_n h + \frac{1}{2}\operatorname{Sin} 2\lambda_n h\right) + c_n e^{\lambda_n h}\operatorname{Sin}\lambda_n h\right] \tag{52}$$

ist, also bis auf p_n ebenfalls als bekannt anzusehen ist.

Und zum Schluß multiplizierten wir (46) mit $\frac{\lambda J_1(\lambda a)}{\lambda^2-\lambda_n^2}\,d\lambda$ und integrieren von $\lambda = 0$ bis $\lambda = \infty$ und bekommen unter Berücksichtigung von (51)

$$\frac{J_0(\lambda_n a)}{4\lambda_n} D_n = -2\mu(1-\nu_1)\left[\sum_{k=1}^{\infty} C_k J_0(\lambda_k a)\int_0^\infty \frac{\lambda^2 J_1^2(\lambda a)\,d\lambda}{(\lambda^2-\lambda_n^2)(\lambda^2-\lambda_k^2)} + \frac{(1-\nu)A}{1-2\nu}\int_0^\infty \frac{J_1^2(\lambda a)\,d\lambda}{\lambda^2-\lambda_n^2}\right]$$

und nach Einsetzen von (47) und (52)

$$\left.\begin{aligned}&\frac{(1-\nu)J_0(\lambda_n a)}{\lambda_n(\lambda_n h e^{\lambda_n h}+\operatorname{Sin}\lambda_n h)}\left[-\frac{p_n}{1-2\nu}\left(\lambda_n h+\frac{1}{2}\operatorname{Sin}2\lambda_n h\right)+c_n e z^{\lambda_n h}\operatorname{Sin}\lambda_n h\right] = \\ &= -2\mu(1-\nu_1)\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left[p_k\frac{(\lambda_k h)^2-\operatorname{Sin}^2\lambda_k h}{(1-2\nu)(\lambda_k h e^{\lambda_k h}+\operatorname{Sin}\lambda_k h)}+c_k\frac{\lambda_k h+e^{\lambda_k h}\operatorname{Sin}\lambda_k h}{\lambda_k h e^{\lambda_k h}+\operatorname{Sin}\lambda_k h}\right]\times\right. \\ &\left.\times J_0(\lambda_k a)\int_0^\infty\frac{\lambda^2 J_1^2(\lambda a)\,d\lambda}{(\lambda^2-\lambda_n^2)(\lambda^2-\lambda_k^2)}+\frac{(1-\nu)A}{1-2\nu}\int_0^\infty\frac{J_1^2(\lambda a)}{\lambda^2-\lambda_n^2}\,d\lambda\right|.\end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Nun stellt diese Beziehung für $n = 1, 2, 3, \ldots$ ein lineares, unendliches Gleichungssystem für die unbekannten Koeffizienten p_k dar. (Auf die uneigentlichen Integrale in (53), die sich als konvergent, sogar geschlossen darstellbar erweisen werden, kommen wir noch zurück.) Die Auflösbarkeit dieses Gleichungssystems vorausgesetzt (die Frage der Konvergenz wird in einer Sonderbetrachtung im bejahenden Sinne beantwortet), kommen wir zu dem Schluß, daß nach Ermittlung der p_k rücklaufend alle anderen Koeffizienten (die q_k aus (40), B aus (50), P_k und Q_k aus (38) und (39)) und unbekannte Funktionen ($\Psi(\lambda)$ aus (46), $\Phi(\lambda)$ aus (43)) bestimmt werden können, wodurch Verformungs- und Spannungszustand in der Platte und in der Unterlage bekannt sind; und das bedeutet wiederum, daß wir keine Möglichkeit mehr haben, die noch offene Randbedingung (8) (Verschwinden der Radialspannung am Plattenmantel) zu erfüllen. Die Erklärung hierfür ist: Die durch den Produktansatz gewonnenen Lösungen der Form $e^{\pm\lambda z}J_0(\lambda r)$, $e^{\pm\lambda z}J_1(\lambda r)$ bzw. $z e^{\pm\lambda z}J_0(\lambda r)$ und $z e^{\pm\lambda z}J_1(\lambda r)$ und insbesondere die Wahl des Eigenwertes sind nicht allgemein genug, um alle Randbedingungen zu erfüllen. Anschließend zeigen wir, wie eine „Korrektur" für die Verletzung dieser Randbedingung im Sinne des *de Saint-Venant*schen Prinzips angebracht werden kann.

6. Radialspannungen und Radialmoment am Plattenmantel. Da die Radialspannung am Plattenmantel $\sigma_r(a, z)$ nicht für alle z verschwindet, wird die „resultierende Spannung"

$$\bar{\sigma}_r = \frac{1}{h}\int_0^h \sigma_r(a, z)\,dz$$

und auch das auf die Längeneinheit bezogene Radialmoment

$$m_R = \int_0^h \sigma_r(a, z)\,z\,dz$$

von Null verschieden sein. Aus (10) erhalten wir mit (32) und (33)

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r(a, z) = 2G\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left[-\frac{z\lambda_k}{2(1-2\nu)}\left(p_k e^{-\lambda_k z}-q_k e^{\lambda_k z}\right)+\lambda_k\left(P_k e^{-\lambda_k z}-Q_k e^{\lambda_k z}\right)+\right.\right.\right. \\ \left.\left.\left.+\frac{3-4\nu}{2(1-2\nu)}\left(p_k e^{-\lambda_k z}+q_k e^{\lambda_k z}\right)\right]J_0(\lambda_k a)+\frac{\nu A}{1-2\nu}\right\},\end{aligned}\right\} \tag{54}$$

und somit ergibt sich für $\bar{\sigma}_r$ und m_R, indem wir vermöge (38), (39) und (40) alle Koeffizienten durch p_k ausdrücken, nach recht mühsamen Zwischenrechnungen

$$\bar{\sigma}_r = \frac{2\,G\,\nu\,A}{1-2\,\nu}\,, \tag{55}$$

$$\left.\begin{aligned} m_R = 2\,Gh^2 \Bigg\{ \sum_{k=1}^{\infty} \Bigg[& \frac{p_k(\lambda_k^2 h^2 - \operatorname{Sin}^2 \lambda_k h)}{(1-2\,\nu)\,\lambda_k^2 h^2 (\lambda_k h\, e^{\lambda_k h} + \operatorname{Sin} \lambda_k h)} + c_k \frac{(1-e^{\lambda_k h})(\lambda_k h - \operatorname{Sin} \lambda_k h)}{\lambda_k^2 h^2 (\lambda_k h\, e^{\lambda_k h} + \operatorname{Sin} \lambda_k h)} \Bigg] J_0(\lambda_k a) + \\ & + \frac{\nu A}{2(1-2\,\nu)} \Bigg\}\,. \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Um die Randbedingung am Plattenmantel bezüglich der Resultierenden zu erfüllen, belasten wir den Rand durch die gleichmäßig verteilte Spannung $-\bar{\sigma}_r$ auf Zug oder Druck und durch das Kräftepaar $-\bar{m}_R = -m_R + \frac{\bar{\sigma}_r h^2}{2}$ auf reine Biegung, wodurch die Verschiebungen[1]

$$\left.\begin{aligned} \zeta' &= \frac{-\nu\,\bar{\sigma}_r}{(1+\nu)\,G}\left(\frac{h}{2} - z\right), \qquad \varrho' = \frac{-(1-\nu)\,\bar{\sigma}_r}{2G\,(1+\nu)}\,r\,, \\ \zeta'' &= \frac{3\,m_R\left[2\,\nu\left(z-\frac{h}{2}\right)^2 + (1-\nu)\,r^2\right]}{(1+\nu)\,Gh^3}, \qquad \varrho'' = \frac{-6\,\bar{m}_R\,(1-\nu)\left(z-\frac{h}{2}\right)r}{(1+\nu)\,Gh^3} \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

und somit nach (10) die Spannungen

$$\left.\begin{aligned} \sigma_z' &= 0\,, \quad \tau' = 0\,, \quad \sigma_r' = \sigma_t' = -\bar{\sigma}_r\,, \\ \sigma_z'' &= 0\,, \quad \tau'' = 0\,, \quad \sigma_r'' = \sigma_t'' = -\frac{12\,\bar{m}_R}{h^3}\left(z-\frac{h}{2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

hervorgerufen werden. Auf diese Weise wird man der Randbedingung (8) nach *de Saint-Venant* gerecht, aber durch diese „zusätzlichen Belastungen" wird das Spannungsfeld in der Platte und wegen des Kontaktes zwischen Platte und Unterlage auch das des Halbraumes geändert und es ist jetzt zu prüfen, wieweit die Randbedingungen bzw. die aus ihnen fließenden Gleichungen zu modifizieren sind.

7. Die durch achsensymmetrische Lasten, reine Biegung und zur Achse orthogonale (gleichmäßige) Randkräfte beanspruchte Platte. Der neue Verformungszustand ist durch die Superposition der Verschiebungen ζ, ϱ bzw. ζ', ϱ' und ζ'', ϱ'' gegeben:

$$Z = \zeta + \zeta' + \zeta'', \qquad P = \varrho + \varrho' + \varrho''\,.$$

Da nach (58) die von $-\bar{\sigma}_r$ und $-\bar{m}_R$ herrührenden Normal- und Schubspannungen identisch verschwinden, ist es offensichtlich, daß die aus den Randbedingungen (1), (2) und (3) hervorgehenden Gleichungen (36), (38), (39) und (40) bestehen bleiben; dasselbe gilt für die aus (4) und (6) fließenden Gleichungen (43) und (46). Eine Änderung wird dagegen die aus (5) entstandene Gleichung (48) erfahren: Aus

$$Z(h, r) = \zeta(h, r) + \zeta'(h, r) + \zeta''(h, r) = \zeta_1(0, r)$$

tritt an Stelle von (48) die Gleichung

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \Bigg\{ & -\frac{p_k}{2\,(1-2\,\nu)}\left[(3-4\,\nu+2\,\lambda_k h)\,e^{-\lambda_k h} + e^{\lambda_k h}\right] + \\ & + \frac{q_k}{2\,(1-2\,\nu)}\left[(3-4\,\nu-2\,\lambda_k h)\,e^{\lambda_k h} + e^{-\lambda_k h}\right] + 2\,c_k \operatorname{Sin} \lambda_k h \Bigg\} \frac{J_0(\lambda_k r)}{2\,\lambda_k} + Ah + B + \\ & + \frac{\bar{\sigma}_r h}{2G(1-\nu)} + \frac{3\bar{m}_R\,[\nu h^2 + 2(1-\nu)\,r^2]}{2(1+\nu)\,Gh^3} = \int_0^{\infty} \Psi(\lambda)\,J_0(\lambda r)\,d\lambda\,. \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

Mit dieser Gleichung verfahren wir genau so wie mit (48): Zuerst multiplizieren wir sie mit $r\,dr$ und integrieren von $r = 0$ bis $r = a$ und erhalten

$$\int_0^{\infty} \Psi(\lambda)\,J_1(\lambda a)\,\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{a}{2}\left\{Ah + B + \frac{\bar{\sigma}_r h}{2G(1-\nu)} + \frac{3\,\bar{m}_R\,[\nu h^2 + (1-\nu)\,a^2]}{2(1+\nu)\,Gh^3}\right\}, \tag{60}$$

[1] *A. Clebsch*, Elastizität fester Körper (1862), S. 181.

womit (50) durch

$$\left.\begin{aligned} &Ah + B + \frac{\bar{\sigma}_r h}{2G(1-\nu)} + \frac{3\bar{m}_R\,[\nu h^2 + (1-\nu)a^2]}{2(1+\nu)Gh^3} = \\ &\quad = -4\mu(1-\nu_1)\left[\sum_{k=1}^{\infty} C_k J_0(\lambda_k a)\int_0^{\infty}\frac{J_1^2(\lambda a)\,d\lambda}{\lambda^2-\lambda_k^2} + \frac{(1-\nu)A}{1-2\nu}\int_0^{\infty}\frac{J_1^2(\lambda a)\,d\lambda}{\lambda^2}\right] \end{aligned}\right\} \quad (61)$$

zu ersetzen ist. Multiplizieren wir (59) mit $r J_0(\lambda_n r)\,dr$ und integrieren zwischen $r = 0$ und $r = a$, so bekommen wir wegen

$$\int_0^a r^3 J_0(\lambda_n r)\,dr = \frac{2a^2}{\lambda_n^2} J_0(\lambda_n a)$$

anstatt (51)

$$\int_0^{\infty}\Psi(\lambda)\frac{\lambda J_1(\lambda a)}{\lambda^2-\lambda_n^2}\,d\lambda = \frac{a J_0(\lambda_n a)}{4\lambda_n} D_n + \frac{6\bar{m}_R(1-\nu)a}{(1+\nu)Gh^3\lambda_n^2}, \quad (62)$$

wodurch an Stelle von (53) nach Einführung von (55) und (56) für die p_k das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} &\frac{(1-\nu J_0)(\lambda_n a)}{\lambda_n(\lambda_n h e^{\lambda_n h} + \operatorname{Sin}\lambda_n h)}\left[c_n e^{\lambda_n h}\operatorname{Sin}\lambda_n h - \frac{p_n}{1-2\nu}\left(\lambda_n h + \frac{1}{2}\operatorname{Sin} 2\lambda_n h\right)\right] + \\ &+ \frac{12(1-\nu)}{\lambda_n^2 h(1+\nu)}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{p_k(\lambda_k^2 h^2 - \operatorname{Sin}^2\lambda_k h)}{(1-2\nu)\lambda_k^2 h^2(\lambda_k h e^{\lambda_k h} + \operatorname{Sin}\lambda_k h)} + c_k\frac{(1-e^{\lambda_k h})(\lambda_k h - \operatorname{Sin}\lambda_k h)}{\lambda_k^2 h^2(\lambda_k h e^{\lambda_k h} + \operatorname{Sin}\lambda_k h)}\right] J_0(\lambda_k a) = \\ &= -2\mu(1-\nu_1)\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{p_k(\lambda_k^2 h^2 - \operatorname{Sin}^2\lambda_k h)}{(1-2\nu)(\lambda_k h e^{\lambda_k h} + \operatorname{Sin}\lambda_k h)} + c_k\frac{\lambda_k h + e^{\lambda_k h}\operatorname{Sin}\lambda_k h}{\lambda_k h e^{\lambda_k h} + \operatorname{Sin}\lambda_k h}\right]\times \\ &\qquad \times J_0(\lambda_k a)\int_0^{\infty}\frac{\lambda^2 J_1^2(\lambda a)\,d\lambda}{(\lambda^2-\lambda_n^2)(\lambda^2-\lambda_k^2)} - \frac{2\mu(1-\nu_1)(1-\nu)A}{1-2\nu}\int_0^{\infty}\frac{J_1^2(\lambda a)\,d\lambda}{\lambda^2-\lambda_n^2} \end{aligned}\right\} \quad (63)$$

hervorgeht.

Für die rechnerische Handhabung dieses Gleichungssystems ist, vom Standpunkt der Mathematik, zunächst die Existenz der in (50) und (63) vorkommenden uneigentlichen Integrale und dann die Existenz der Lösungen $p_1, p_2, \ldots$ zu zeigen [1]. Wir wenden uns jetzt der ersten Frage zu.

8. Berechnung der Integrale: $I = \int_0^{\infty}\frac{J_1^2(t)\,dt}{t^2}$, $\quad I_n = \int_0^{\infty}\frac{J_1^2(t)\,dt}{t^2-t_n^2}$,

$$I_{kn} = \int_0^{\infty}\frac{t^2 J_1^2(t)\,dt}{(t^2-t_n^2)(t^2-t_k^2)} = I_{nk}.$$

Durch die Substitution $\lambda a = t$ lassen sich die in (63) bzw. (50) vorkommenden uneigentlichen Integrale auf diese zurückführen:

$$\int_0^{\infty}\frac{J_1^2(\lambda a)}{\lambda^2}\,d\lambda = a I, \qquad \int_0^{\infty}\frac{J_1^2(\lambda a)\,d\lambda}{\lambda^2-\lambda_n^2} = a I_n, \qquad \int_0^{\infty}\frac{\lambda^2 J_1^2(\lambda a)\,d\lambda}{(\lambda^2-\lambda_n^2)(\lambda^2-\lambda_k^2)} = a I_{kn}. \quad (64)$$

Hierbei sind t_n bzw. t_k Nullstellen von $J_1(t)$, d. h. es ist $J_1(t_n) = J_1(t_k) = 0$.

Um die Auswertung von I brauchen wir uns nicht zu bemühen. Es ist ein Sonderfall des sog. *Schafheitlin*schen Integrals [2], und es gilt

$$\int_0^{\infty}\frac{J_1^2(t)\,dt}{t^2} = \frac{4}{3\pi}. \quad (65)$$

Die Bestimmung von I_n erfordert mehr Aufwand an Überlegung und Rechnung. Durch Partialbruchzerlegung und vermöge der Substitution $t - t_n = x$ bzw. $t + t_n = x$ erhalten wir zunächst

$$I_n = \int_0^{\infty}\frac{J_1^2(t)\,dt}{t^2-t_n^2} = \frac{1}{2t_n}\int_0^{\infty} J_1^2(t)\left(\frac{1}{t-t_n} - \frac{1}{t+t_n}\right)dt = \frac{1}{2t_n}\left[\int_{-t_n}^{\infty}\frac{J_1^2(x+t_n)}{x}\,dx - \int_{t_n}^{\infty}\frac{J_1^2(x-t_n)}{x}\,dx\right]. \quad (66)$$

[1] Bei der Klärung dieser Fragen habe ich meinem verehrten Kollegen, Herrn *Schmeidler*, für wertvolle Unterhaltungen zu danken; insbesondere rührt der in Ziff. 9 gegebene Konvergenzbeweis und die Näherungsformel (76) von ihm her.

[2] *Watson*, Theory of Bessel Functions, S. 403.

Unter Berücksichtigung der Additionstheoreme der *Besselfunktionen*[1] und Beachtung von $J_1(t_n) = 0$ und $J_{-\alpha}(x) = (-1)^{\alpha} J_{\alpha}(x)$ — für $\alpha > 0$, ganz — ergeben sich

$$\left.\begin{aligned} J_1(x + t_n) &= \sum_{\alpha=1}^{\infty} (-1)^{\alpha-1} J_{\alpha}(x) \left[J_{\alpha-1}(t_n) - J_{\alpha+1}(t_n)\right], \\ J_1(x - t_n) &= \sum_{\alpha=1}^{\infty} J_{\alpha}(x) \left[J_{\alpha-1}(t_n) - J_{\alpha+1}(t_n)\right] \end{aligned}\right| \qquad (67)$$

und damit

$$A_I = \int_{-t_n}^{\infty} \frac{J_1^2(x+t_n)}{x}\,dx = \sum_{\alpha,\beta=1}^{\infty} (-1)^{\alpha+\beta} \left[J_{\alpha-1}(t_n) - J_{\alpha+1}(t_n)\right]\left[J_{\beta-1}(t_n) - J_{\beta+1}(t_n)\right] \int_{-t_n}^{\infty} \frac{J_{\alpha}(x) J_{\beta}(x)\,dx}{x}$$

und

$$A_{II} = \int_{t_n}^{\infty} \frac{J_1^2(x-t_n)}{x}\,dx = \sum_{\alpha,\beta=1} \left[J_{\alpha-1}(t_n) - J_{\alpha+1}(t_n)\right]\left[J_{\beta-1}(t_n) - J_{\beta+1}(t_n)\right] \int_{t_n}^{\infty} \frac{J_{\alpha}(x)\, J_{\beta}(x)\,dx}{x}.$$

Wegen $\int_{-t_n}^{\infty} = \int_{-t_n}^{0} + \int_{0}^{\infty}$ und $\int_{t_n}^{\infty} = \int_{t_n}^{0} + \int_{0}^{\infty}$ bekommen wir mit

$$\int_{-t_n}^{0} \frac{J_{\alpha}(x)\, J_{\beta}(x)}{x}\,dx = \int_{t_n}^{0} \frac{J_{\alpha}(-\xi)\, J_{\beta}(-\xi)}{\xi}\,d\xi = (-1)^{\alpha+\beta} \int_{t_n}^{0} \frac{J_{\alpha}(x)\, J_{\beta}(x)}{x}\,dx$$

$$\left.\begin{aligned} A_I - A_{II} &= \sum_{\alpha,\beta=1}^{\infty} \left[(-1)^{\alpha+\beta} - 1\right]\left[J_{\alpha-1}(t_n) - J_{\alpha+1}(t_n)\right]\left[J_{\beta-1}(t_n) - J_{\beta+1}(t_n)\right] \times \\ &\times \int_{0}^{\infty} \frac{J_{\alpha}(x)\, J_{\beta}(x)}{x}\,dx = -2 \sum_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ \alpha+\beta=2m+1}}^{\infty} \left[J_{\alpha-1}(t_n) - J_{\alpha+1}(t_n)\right]\left[J_{\beta-1}(t_n) - J_{\beta+1}(t_n)\right] \times \\ &\times \int_{0}^{\infty} \frac{J_{\alpha}(x)\, J_{\beta}(x)}{x}\,dx. \end{aligned}\right| \qquad (68)$$

Andererseits ist[2]

$$\int_{0}^{\infty} \frac{J_{\alpha}(x)\, J_{\beta}(x)}{x}\,dx = \frac{2 \sin(\alpha - \beta)\frac{\pi}{2}}{\pi(\alpha^2 - \beta^2)},$$

und da im vorliegenden Falle $\alpha + \beta = 2m + 1$ (ungerade) ist, erhalten wir

$$\sin(\alpha - \beta)\frac{\pi}{2} = \sin(2m + 1 - 2\beta)\frac{\pi}{2} = \cos(m - \beta)\pi = (-1)^{m-\beta} = (-1)^{\frac{\alpha-\beta-1}{2}}$$

und somit nach Einsetzen von (68) in (66)

$$I_n = \int_{0}^{\infty} \frac{J_1^2(t)}{t^2 - t_n^2}\,dt = \frac{2}{\pi t_n} \sum_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ \alpha+\beta=2m+1}}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{\alpha-\beta-1}{2}}}{\beta^2 - \alpha^2} \left[J_{\alpha-1}(t_n) - J_{\alpha+1}(t_n)\right]\left[J_{\beta-1}(t_n) - J_{\beta+1}(t_n)\right]. \qquad (69)$$

Die Kenntnis von I_n ermöglicht es, vermöge einer identischen Umformung I_{kn} ohne jede weitere Rechnung hinzuschreiben:

$$I_{kn} = \int_{0}^{\infty} \frac{t^2 J_1^2(t)\,dt}{(t^2 - t_n^2)(t^2 - t_k^2)} = \frac{1}{t_k^2 - t_n^2} \int_{0}^{\infty} J_1^2(t) \left(\frac{t_k^2}{t^2 - t_k^2} - \frac{t_n^2}{t^2 - t_n^2}\right) dt,$$

und das bedeutet, daß

$$I_{kn} = \frac{t_k^2}{t_k^2 - t_n^2} I_k - \frac{t_n^2}{t_k^2 - t_n^2} I_n \qquad (70)$$

---

[1] *Jahnke-Emde*, Funktionentafeln (1933), S. 213.
[2] *Watson*, Theory of Bessel Functions, S. 404.

ist, wobei I_k bzw. I_n durch (69) gegeben sind. Der Fall $k = n$ muß gesondert behandelt werden. Setzen wir I_k und I_n nach (69) in (70) ein, so ergibt sich zunächst

$$I_{k\,n} = \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ \alpha+\beta=2m+1}}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{\alpha-\beta-1}{2}}}{(\beta^2-\alpha^2)\,(t_k^2-t_n^2)} \{t_k\,[J_{\alpha-1}(t_k)-J_{\alpha+1}(t_k)]\,[J_{\beta-1}(t_k)-J_{\beta+1}(t_k)]- \\ - t_n\,[J_{\alpha-1}(t_n)-J_{\alpha+1}(t_n)]\,[J_{\beta-1}(t_n)-J_{\beta+1}(t_n)]\}\,.$$

Für $k = n$ erscheint diese Gleichung in der unbestimmten Form 0/0; die *Bernoulli*sche Regel angewendet, erhalten wir unter Heranziehung von Funktionsgleichungen für *Bessel*sche Funktionen nach längerer Zwischenrechnung

$$I_{k\,k} = \int_0^{\infty} \frac{t^2\,J_1^2(t)\,dt}{(t^2-t_k^2)^2} = -\frac{1}{2}\,I_k - \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ \alpha+\beta=2m+1}}^{\infty} (-1)^{\frac{\alpha-\beta-1}{2}} \frac{\left(\frac{\alpha}{t_k}\right)^2-1}{\alpha^2-\beta^2}\,J_\alpha(t_k)\,[J_{\beta-1}(t_k)-J_{\beta+1}(t_k)]. \quad (71)$$

Damit sind die fraglichen uneigentlichen Integrale numerisch auswertbar. Für $k, n = 1, 2, 3, 4$ sind die Zahlenwerte[1]:

n	1	2	3	4
I_n	—0,04455282	—0,01707376	—0,00917584	—0,00583368
I_{n1}	—0,08610633	—0,00539201	—0,00332785	—0,00234266
I_{n2}	—0,00539201	—0,05418659	—0,00201452	—0,00152184
I_{n3}	—0,00332785	—0,00201452	—0,03905402	—0,00116055
I_{n4}	—0,00234266	—0,00152184	—0,00116055	—0,03013391

9. Beweis der Auflösbarkeit des unendlichen Gleichungssystems. Mit Rücksicht auf (64) erscheint das Gleichungssystem (63) in folgender Form:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{(1-\nu)\,J_0(\lambda_n a)}{\lambda_n(\lambda_n h e^{\lambda_n h}+\operatorname{Sin}\lambda_n h)}\left[c_n e^{\lambda_n h}\operatorname{Sin}\lambda_n h - \frac{p_n}{1-2\nu}\left(\lambda_n h+\frac{1}{2}\operatorname{Sin} 2\lambda_n h\right)\right]+ \\ &+\frac{12\,(1-\nu)}{\lambda_n^2 h\,(1+\nu)}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{p_k(\lambda_k^2 h^2-\operatorname{Sin}^2\lambda_k h)}{(1-2\nu)\,\lambda_k^2 h^2(\lambda_k h e^{\lambda_k h}+\operatorname{Sin}\lambda_k h)}+c_k\frac{(1-e^{\lambda_k h})(\lambda_k h-\operatorname{Sin}\lambda_k h)}{\lambda_k^2 h^2\,(\lambda_k h e^{\lambda_k h}+\operatorname{Sin}\lambda_k h)}\right] J_0(\lambda_k a)= \\ &=-2\mu(1-\nu_1)\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{p_k(\lambda_k^2 h^2-\operatorname{Sin}^2\lambda_k h)}{(1-2\nu)\,(\lambda_k h e^{\lambda_k h}+\operatorname{Sin}\lambda_k h)}+c_k\frac{\lambda_k h+e^{\lambda_k h}\operatorname{Sin}\lambda_k h}{\lambda_k h e^{\lambda_k h}+\operatorname{Sin}\lambda_k h}\right] J_0(\lambda_k a)\,a\,I_{k\,n}- \\ &\qquad -\frac{2\mu(1-\nu_1)(1-\nu)}{1-2\nu}\,A\,a\,I_n\,. \end{aligned}\right\} \quad (72)$$

Um die Existenz einer Lösung $p_1, p_2, \ldots$ für dieses Gleichungssystems nachzuweisen, dividieren wir (72) durch

$$N = \frac{(1-\nu)\,J_0(\lambda_n a)\,(\lambda_n h+\frac{1}{2}\operatorname{Sin} 2\lambda_n h)}{(1-2\nu)\,\lambda_n(\lambda_n h e^{\lambda_n h}+\operatorname{Sin}\lambda_n h)}\,. \quad (73)$$

Dann wird das erste Glied der linken Seite

$$\frac{c_n(1-2\nu)\operatorname{Sin}\lambda_n h}{(\lambda_n h+\frac{1}{2}\operatorname{Sin} 2\lambda_n h)} - p_n = 2\,c_n(1-2\nu) - p_n + c_n(1-2\nu)\left[\frac{e^{\lambda_n h}\operatorname{Sin}\lambda_n h}{\lambda_n h+\frac{1}{2}\operatorname{Sin} 2\lambda_n h}-2\right],$$

und somit geht nach Einführung von

$$p_n = 2\,c_n(1-2\nu)+\delta_n \quad (74)$$

[1] Bei diesen und den anderen numerischen Rechnungen haben mich meine Assistenten, die Herren Dr. *Hoffmann* und Dipl.-Ing. *Reckling* wirksam unterstützt; ersterer hatte auch die oft langwierigen allgemeinen Rechnungen kontrolliert.

(72) über in

$$\left.\begin{aligned} &-\delta_n+(1-2\nu)\,c_n\left[\frac{e^{\lambda_n h}\,\mathfrak{Sin}\,\lambda_n h}{\lambda_n h+\frac{1}{2}\,\mathfrak{Sin}\,2\lambda_n h}-2\right]+\frac{12(1-\nu)}{\lambda_n^2 h\,(1+\nu)\,N}\sum_{k=1}^{\infty}{}'\left\{\frac{\delta_k\,(\lambda_k^2 h^2-\mathfrak{Sin}^2\,\lambda_k h)}{(1-2\nu)\,\lambda_k^2 h^2\,(\lambda_k h e^{\lambda_k h}+\mathfrak{Sin}\,\lambda_k h)}+\right.\\ &\left.+\,c_k\left[\frac{2\,(\lambda_k^2 h^2-\mathfrak{Sin}^2\,\lambda_k h)}{\lambda_k^2 h^2\,(\lambda_k h e^{\lambda_k h}+\mathfrak{Sin}\,\lambda_k h)}+\frac{(1-e^{\lambda_k h})\,(\lambda_k h-\mathfrak{Sin}\,\lambda_k h)}{\lambda_k^2 h^2\,(\lambda_k h e^{\lambda_k h}+\mathfrak{Sin}\,\lambda_k h)}\right]\right\}J_0(\lambda_k a)=\\ &=-\frac{2\mu(1-\nu_1)}{N}\sum_{k=1}^{\infty}{}'\left\{\frac{\delta_k\,(\lambda_k^2 h^2-\mathfrak{Sin}^2\,\lambda_k h)}{(1-2\nu)\,(\lambda_k h e^{\lambda_k h}+\mathfrak{Sin}\,\lambda_k h)}+\right.\\ &\left.+\,c_k\left[\frac{\lambda_k h+e^{\lambda_k h}\,\mathfrak{Sin}\,\lambda_k h}{\lambda_k h e^{\lambda_k h}+\mathfrak{Sin}\,\lambda_k h}+\frac{2\,(\lambda_k^2 h^2-\mathfrak{Sin}^2\,\lambda_k h)}{\lambda_k h e^{\lambda_k h}+\mathfrak{Sin}\,\lambda_k h}\right]\right\}J_0(\lambda_k a)\,a\,I_{kn}-\\ &-\frac{2\mu(1-\nu_1)\,(1-\nu)}{(1-2\nu)\,N}\,A\,a\,I_n. \end{aligned}\right\}\quad(75)$$

Mit wachsendem n ($n\to\infty$) nehmen auch die Eigenwerte λ_n zu ($\lambda_n\to\infty$), so daß das zweite Glied auf der linken Seite für $n\to\infty$ verschwindet, da die eckige Klammer gegen Null strebt. In den weiteren Gliedern streben die eckigen Klammern mit wachsendem k ebenfalls gegen Null und dasselbe gilt für das letzte Glied der rechten Seite (da für $n\to\infty$ nach (73) N über alle Grenzen wächst). Wegen des mit n wachsenden Nenners N können daher für großes n alle Glieder mit c_k und c_n wie auch das letzte Glied fortgelassen werden, so daß ein homogenes Gleichungssystem übrigbleibt, dessen Glieder für $k=1, 2, \ldots n-1$ wegen des großen N ebenfalls unendlich klein sind. Das nun übrigbleibende Gleichungssystem für $\delta_k, \delta_{k+1}, \ldots$ kann durch $\delta_k=\delta_{k+1}=\cdots=0$ gelöst werden. Damit ist nicht nur die Lösbarkeit des Gleichungssystems (72) bewiesen, sondern wegen (74) zugleich gezeigt, daß für große $n(>4)$ die Näherungsformel

$$p_n\sim 2\,c_n(1-2\,\nu)\quad(76)$$

gilt. In den meisten Fällen wird es also genügen, p_1, p_2, p_3, p_4 aus dem für $n=1, 2, 3, 4$ aus (72) fließenden linearen Gleichungssystem zu berechnen und die weiteren p_n (wenn nötig) nach (76) zu ermitteln. Die Herleitung eines solchen Gleichungssystems für die ersten vier Koeffizienten erfolgt in der bei einem unendlichen Gleichungssystem üblichen Weise: Man setzt in (73) $n=1, 2, 3, 4$ und geht jedesmal in den Summen mit k ebenfalls bis 4, wodurch man zu einem linearen inhomogenen Gleichungssystem kommt.

10. Ein Beispiel. Eine mehr den Bedürfnissen der Praxis angemessene numerische Ausschöpfung der hier gewonnenen allgemeinen Ergebnisse, insbesondere Vergleiche mit den Ergebnissen der auf der *Kirchhoff*schen Plattentheorie und der *Zimmermann*schen Hypothese aufgebauten Untersuchungen sollen an einer anderen Stelle erfolgen; hier sei lediglich ein kurzes Beispiel angeführt.

Fundamentplatte aus Stahlbeton: $a=6\,\mathrm{m}$; $h=2\,\mathrm{m}$; $G=15\cdot10^4\,\mathrm{kg/cm^{-2}}$; $\nu=1/6$. Die Last von $P=500\,\mathrm{t}$ sei innerhalb eines Kreises vom Halbmesser $r_0=2{,}5\,\mathrm{m}$ gleichmäßig verteilt (Abb. 3). Für die Unterlage (Mittelsand) nehmen wir an $G_1=413\,\mathrm{kg/cm^{-2}}$ und $\nu_1=0{,}45$. Nach (35) erhalten wir mit $\sigma_0=\dfrac{P}{r_0^2\,\pi}$

$$c_k=-\frac{\sigma_0}{a^2\,G\,J_0^2(\lambda_k a)}\int_0^{r_0}J_0(\lambda_k r)\,r\,dr=-\frac{\sigma_0\,r_0\,J_1(\lambda_k r_0)}{\lambda_k a^2\,G\,J_0^2(\lambda_k a)}\,.\quad(77)$$

Für diesen Belastungsfall ergibt die numerische Rechnung für die ersten vier Koeffizienten $p_1=-22{,}3272\cdot10^{-6}$; $p_2=-8{,}8040\cdot10^{-6}$; $p_3=2{,}7557\cdot10^{-6}$; $p_4=4{,}9260\cdot10^{-6}$, während die Näherungsformel (76) $p_4=5{,}019\cdot10^{-6}$ liefert. Mit Hilfe dieser Koeffizienten bzw. der zugehörigen Eigenfunktionen sind die wegen der nicht streng erfüllten Mantelbedingung in erster Linie interessierenden Radialspannungen am Plattenumfang und in der Mitte berechnet und in Abb. 3 mit und ohne Randkorrektur aufgetragen. Man ersieht aus diesem Bild, daß die Randbedingung am Mantel $(\sigma_r(a,z)=0)$ in ausreichender Weise erfüllt ist. Die maximale Druckspannung zwischen Platte und Unterlage ergab sich für $r=0$ und $z=h$ zu $0{,}70\,\mathrm{kg/cm^{-2}}$ und die Einsenkung derselben Stelle beträgt 0,32 cm.

11. Eine verbesserte Näherungsformel für die Koeffizienten p_k. Die Approximation (76) stellt natürlich für die ersten Koeffizienten noch eine recht rohe Näherung dar, aber ihre Kenntnis verhilft uns zu einer Schlußweise, die auf eine bessere Näherungsformel führt.

Das vorangehend angeführte Beispiel zeigte bei der numerischen Behandlung, daß die Auflösungen der Gleichungen (53) ohne Randkorrektur bzw. (63) mit Randkorrektur sich nicht wesentlich unterscheiden, so daß wir zur Herleitung einer Näherungsformel von den ohne die Randkorrektur gewonnenen Gleichungen ausgehen können. Wir können (48) mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} D_k \frac{J_0(\lambda_k r)}{2\lambda_k} + Ah + B = g(r) \tag{78}$$

in der Form

$$\int_0^{\infty} \Psi(\lambda)\, J_0(\lambda r)\, d\lambda = g(r)$$

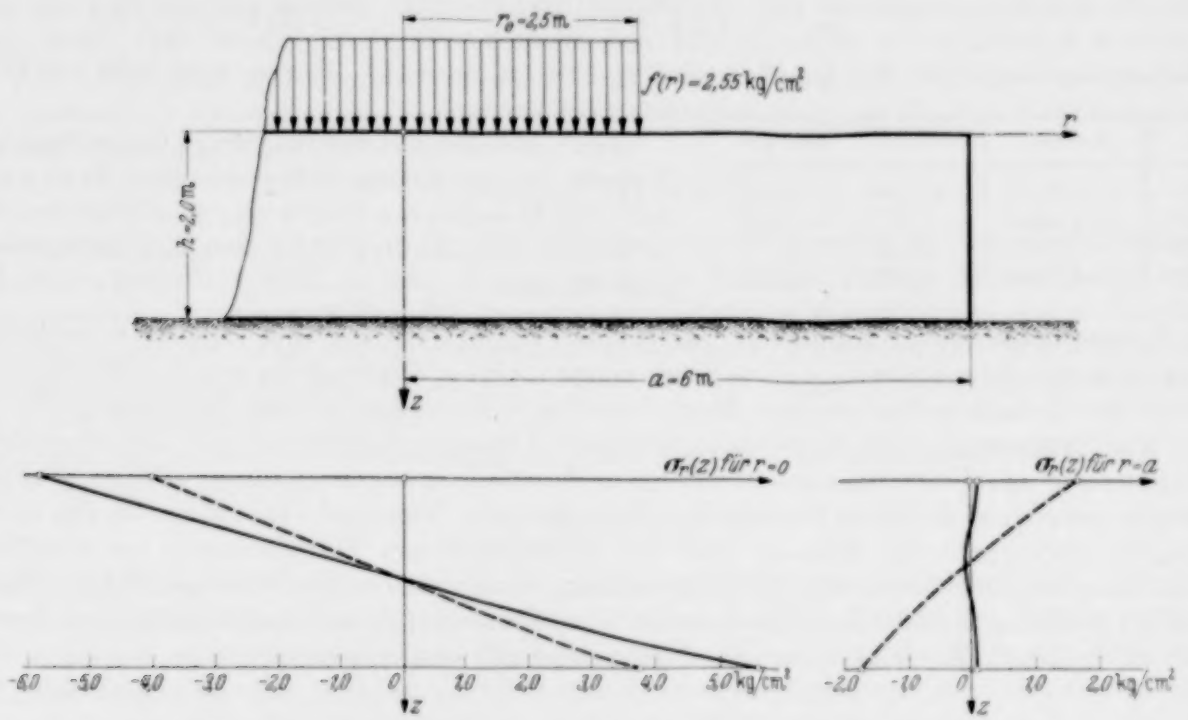


Abb. 3. Platte mit gleichmäßiger Last. Radialspannungen am Rand und in der Mitte.
– – – – – – ohne Randkorrektur. ———— mit Randkorrektur.

schreiben. Dehnen wir die Gültigkeit dieser nur für $r \leq a$ bestehenden Beziehung für alle r aus, so erhalten wir nach der *Hankel*schen Umkehrformel

$$\frac{\Psi(\lambda)}{\lambda} = \int_0^{\infty} J_0(\lambda r)\, g(r)\, r\, dr = \int_0^{a} J_0(\lambda r)\, g(r)\, r\, dr + \int_a^{\infty} J_0(\lambda r)\, g(r)\, r\, dr$$

oder mit

$$\int_a^{\infty} J_0(\lambda r)\, g(r)\, r\, dr = \psi(\lambda) \tag{79}$$

$$\frac{\Psi(\lambda)}{\lambda} = \int_0^{a} J_0(\lambda r)\, g(r)\, r\, dr + \psi(\lambda)\,. \tag{80}$$

Nach Einführung von (78) und Ausführung der Integration ergibt sich aus (80)

$$\frac{\Psi(\lambda)}{\lambda} = (Ah + B)\frac{a}{\lambda} J_1(\lambda a) + \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\lambda J_1(\lambda a)\, J_0(\lambda_k a)}{2\lambda_k(\lambda^2 - \lambda_k^2)} D_k + \psi(\lambda)\,,$$

woraus für $\lambda = \lambda_n$ (da auf der rechten Seite nur $k = n$ einen Beitrag liefert)

$$\frac{\Psi(\lambda_n)}{\lambda_n} = \frac{a^2 D_n}{4\lambda_n} J_0^2(\lambda_n a) + \psi(\lambda_n) \tag{81}$$

hervorgeht. Auf demselben Wege bekommen wir aus (46) für $\lambda = \lambda_n$

$$\Psi(\lambda_n) = -\mu(1 - \nu_1)\, a^2 J_0^2(\lambda_n a)\, C_n\,, \tag{82}$$

und aus (81) und (82) fließt

$$D_n + 4\,\mu(1-\nu_1)\,C_n = -\frac{4\,\lambda_n\,\psi(\lambda_n)}{a^2\,J_0^2(\lambda_n a)}\,.$$

Setzen wir hier (47) und (52) ein, so erhalten wir

$$p_n = 2(1-2\nu)\,c_n\,\frac{(1-\nu)\,e^{\lambda_n h}\,\mathfrak{Sin}\,\lambda_n h + (1-\nu_1)\,\mu(\lambda_n h + e^{\lambda_n h}\,\mathfrak{Sin}\,\lambda_n h)}{(1-\nu)(2\,\lambda_n h + \mathfrak{Sin}\,2\,\lambda_n h) - 2\,\mu(1-\nu_1)(\lambda_n^2 h^2 - \mathfrak{Sin}^2\,\lambda_n h)} + \\ + \frac{2\,\lambda_n(\lambda_n h + \mathfrak{Sin}\,\lambda_n h)\,\psi(\lambda_n)}{a^2\,J_0^2(\lambda_n a)(1-\nu)(2\,\lambda_n h + \mathfrak{Sin}\,2\,\lambda_n h) - 2\,\mu(1-\nu_1)(\lambda_n^2 h^2 - \mathfrak{Sin}^2\,\lambda_n h)}\,. \tag{83}$$

Da das erste Glied in (83) für $n \to \infty$ gegen $2(1-2\nu)\,c_n$ strebt und im zweiten der Faktor von $\psi(\lambda_n)$ gegen Null, folgern wir mit Rücksicht auf (76), daß

$$p_n \approx 2(1-2\nu)\,c_n\,\frac{(1-\nu)\,e^{\lambda_n h}\,\mathfrak{Sin}\,\lambda_n h + (1-\nu_1)\,\mu(\lambda_n h + e^{\lambda_n h}\,\mathfrak{Sin}\,\lambda_n h)}{(1-\nu)(2\,\lambda_n h + \mathfrak{Sin}\,2\,\lambda_n h) - 2(1-\nu_1)\,\mu(\lambda_n^2 h^2 - \mathfrak{Sin}^2\,\lambda_n h)} \tag{84}$$

eine Näherungsformel für die Koeffizienten p_n bzw. p_k darstellt. Für $n \to \infty$ geht aus (84) wieder (76) hervor.

	Aus (63)	nach (84)	nach (76)
$p_1 \cdot 10^6$	—22,3272	—27,840	—8,643
$p_2 \cdot 10^6$	— 8,8040	— 7,275	—5,482
$p_3 \cdot 10^6$	2,7557	2,400	2,264
$p_4 \cdot 10^6$	4,9260	5,082	5,019

Die Güte der Formel (84) zeigt die nebenstehende Tabelle, in der die aus (63) ermittelten bzw. nach (76) und (84) berechneten ersten vier Koeffizienten für den in Ziff. 10 behandelten Belastungsfall nebeneinandergestellt sind.

12. Zusammenfassung. Behandelt wurde das Problem der auf dem Halbraum aufliegenden, achsensymmetrisch belasteten dicken Kreisplatte. Unter Zugrundelegung der *Hooke*schen Gesetze und der Annahme des stetigen Kontaktes bei vollkommen glatter Berührungsfläche wurden für den Spannungs- und Verformungszustand Lösungen hergeleitet, die mit Ausnahme der Radialspannung am Plattenmantel sämtlichen Randbedingungen genügen. Dieser Randbedingung wurde nach dem *de Saint-Venant*schen Prinzip in der Weise gerecht, indem das aus den Restspannungen hervorgehende Moment und die Einzelkraft am Plattenmantel im umgekehrten Sinne als Last angebracht wurde. Die Entwicklungskoeffizienten der Lösungen für die Platte ergeben sich aus einem unendlichen, linearen Gleichungssystem, dessen Auflösbarkeit nachgewiesen und für die höheren Koeffizienten eine Näherungsauflösung gegeben wurde.

(Eingegangen am 6. Oktober 1950.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr.-Ing. *I. Szabó*, Berlin-Charlottenburg 2, Technische Universität, Hardenbergstr. 34.

Lösung einer Aufgabe über Strömung in Leitungssystemen*.

Von W. Richter.

1. Einleitung. Im Folgenden soll eine Aufgabe behandelt werden, die für Pumpenleitungen, Tunnelbelüftung, Grubenbewetterung, Saugzug- und Unterwindanlagen in Kraftwerken, verschiedene industrielle Ventilationszwecke vorwiegend in der chemischen Industrie und für andere Gasleitungssysteme von Bedeutung ist.

An der Eintrittsstelle E ströme das Fördermittel in den zu betrachtenden Teil eines Leitungssystems ein und verlasse diesen an der Austrittsstelle A. Das Leitungssystem sei überall vollkommen dicht. Die Unterschiede der geodätischen Höhen sollen vernachlässigt werden. Die Dichte des Fördermittels werde im betrachteten Teil des Leitungssystems als konstant vorausgesetzt, und es gilt daher in einer überall dichten einfachen Leitung für den Förderstrom Q die Kontinuitätsgleichung

$$Q = \text{konst} \quad [Q] = \mathrm{m^3/s}\,.$$

Ein Leitungssystem soll passives System genannt werden, wenn in ihm dem Fördermittel keine Energie zugeführt wird, in ihm also insbesondere kein Lüfter bzw. keine Pumpe arbeitet. In einem passiven System wird dem Fördermittel überall durch Wandreibung und an bestimmten Stellen des Leitungssystems durch Querschnittsänderungen, Umlenkungen und andere örtliche Widerstände Energie entzogen. Es sei $P_{ik} = P_i - P_k$ die Gesamtdruckdifferenz zwischen den Stellen i und k gemessen in $\mathrm{kg/m^2}$.

Für stationäre turbulente Strömungen in einer überall dichten passiven einfachen Leitung besteht dann die Beziehung

$$R_{ik}\, Q^2 = P_{ik}\,. \tag{1}$$

Der darin enthaltene R-Wert ist von den Abmessungen, der Form und der Rauhigkeit der Leitung, von den in ihr liegenden örtlichen Widerständen, von der Dichte des Fördermittels und außerdem noch vom Sinn, in welchem die Leitung durchflossen wird, abhängig. Bei der Umkehrung des Sinnes werden ja bisherige Querschnittserweiterungen zu Querschnittsverengungen und umgekehrt, und auch manche anderen örtlichen Widerstände ergeben dabei verschiedene Druckverluste. Im allgemeinen ist daher $R_{ik} \neq R_{ki}$. In jedem Falle haben R und P_{ik} gleiche Vorzeichen.

In zwei Sonderfällen kann man den R-Wert für ein Leitungssystem einfach angeben, wenn man die R_k-Werte aller seiner Einzelleitungen kennt.

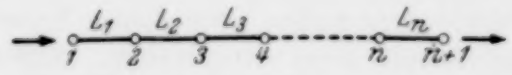


Abb. 1. Hintereinander geschaltete Leitungen.

1. Für hintereinander geschaltete Leitungen (Abb. 1) gilt

$$R = \sum_{i=1}^{n} R_i\,.$$

2. Für parallel geschaltete Leitungen (Abb. 2) ergibt sich

$$\frac{1}{\sqrt{R}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{R_i}}\,.$$

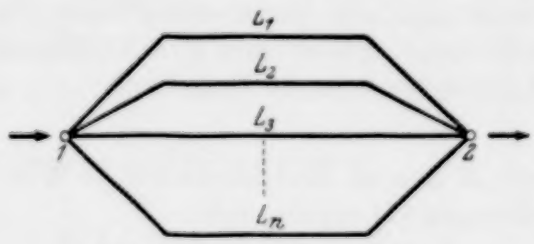


Abb. 2. Parallel geschaltete Leitungen.

Im Folgenden soll für ein Leitungssystem, das sich nicht aus diesen beiden Grundformen aufbauen läßt, eine graphische Lösung mit nomographischen Hilfsmitteln angegeben werden.

2. Zwei parallel geschaltete Leitungen mit einer Querverbindung als passives System. Ein überall dichtes passives System habe die in Abb. 3 dargestellte Form. Im Punkte E teilt sich die Zuströmleitung in zwei Teilleitungen, die sich im Punkte A wieder zur Abströmleitung vereinigen. Vom Punkte 1 der einen dieser Teilleitungen führt eine Querverbindung zum Punkte 2 der anderen Teilleitung. Das so beschriebene Leitungssystem besteht also aus fünf einfachen

* Über einen Teil der hier gegebenen Entwicklungen wurde auf der Tagung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik im April 1950 in Darmstadt berichtet.

Leitungen, für welche fünf Beziehungen von der Form (1) aufgestellt werden können. Die fünf entsprechenden R-Werte seien bekannt. Mit P soll die positiv vorausgesetzte Gesamtdruckdifferenz $P = P_{EA} = P_E - P_A$ bezeichnet werden. Aus $P \geqq 0$ folgt für ein überall dichtes passives System $P_{E1} \geqq 0$, $P_{1A} \geqq 0$, $P_{E2} \geqq 0$, $P_{2A} \geqq 0$.

Dadurch ist in beiden Teilleitungen des Systems der in Abb. 3 eingezeichnete Durchflußsinn festgelegt, und die entsprechenden R-Werte für (1) sind ebenfalls eindeutig R_1, ${}_1R$, R_2, ${}_2R$. Entsprechend $P_{12} \gtrless 0$ sind in der Querverbindung 1 bis 2 zwei verschiedene Sinne für den Durchfluß möglich und dazu gehören i. a. zwei verschiedene R-Werte R_{12} bzw. R_{21}.

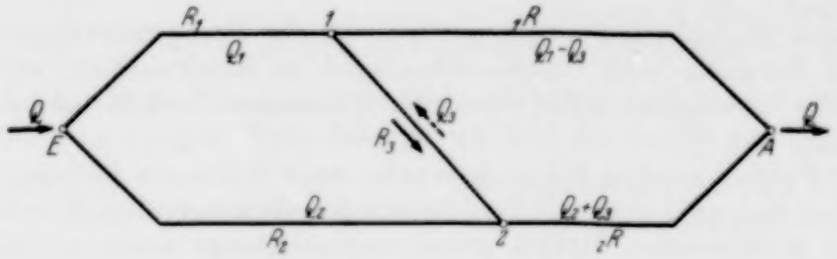


Abb. 3. Passives System.

Die in E einströmende Menge Q teilt sich dort in Q_1 und Q_2. Wird die in der Querverbindung strömende Menge Q_3 als positiv bzw. negativ angenommen, je nachdem ob sie von 1 nach 2 oder von 2 nach 1 fließt, so gehört in beiden Fällen zum Teilstrang $1A$ die Menge $Q_1 - Q_3$ und zum Teilstrang $2A$ die Menge $Q_2 + Q_3$. Man erhält daher folgendes Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned}
Q - Q_1 - Q_2 &= 0\,,\\
R_1 Q_1^2 &= P_{E1}\,,\\
R_2 Q_2^2 &= P_{E2}\,,\\
R_3 Q_3^2 &= P_{12}\,,\\
{}_1R\,(Q_1 - Q_3)^2 &= P_{1A}\,,\\
{}_2R\,(Q_2 + Q_3)^2 &= P_{2A}\,,\\
P_{E1} + P_{1A} &= P\,,\\
P_{E2} + P_{2A} &= P\,,\\
P_{E1} + P_{12} + P_{2A} &= P\,.
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Dabei bezeichnet R_3 je nach der zugehörigen Strömungsrichtung einen der beiden Werte R_{12} bzw. R_{21}.

Das Gleichungssystem (2) legt die neuen Größen Q, Q_1, Q_2, Q_3, P_{E1}, P_{E2}, P_{1A}, P_{2A}, P_{12} für jeden Wert des Parameters P fest. Mit Ausnahme von Q_3 und P_{12} sind diese Größen nur dann Lösungen der vorgelegten Aufgabe, wenn sie nicht negativ sind. Die Werte P_{12} und Q_3 müssen gleiche Vorzeichen haben, und dieses Vorzeichen muß dem unter den beiden für R_3 möglichen Werten gewählten Wert entsprechen. Außerdem gelten die Bedingungen $|Q_3| \leq Q$ und $|P_{12}| \leq P$. Ist aber zu einem bestimmten Wert von P eine Gruppe der gesuchten neun Größen so bestimmt, daß für sie das Gleichungssystem erfüllt ist, so gilt dasselbe für jede Gruppe, die man erhält, wenn man alle darin enthaltenen Förderströme mit der beliebig gewählten Konstanten k und alle darin enthaltenen Druckdifferenzen mit k^2 multipliziert. Daraus folgt für das betrachtete Leitungssystem die Beziehung

$$R\,Q^2 = P\,, \tag{3}$$

wo R den zu bestimmenden R-Wert des ganzen Leitungssystems bezeichnet. Aus den Gleichungen (2) ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}
{}_1R_1 Q_1^2 + {}_1R\,Q_3^2 &= 2\,{}_1R\,Q_1 Q_3 + P\,,\\
{}_2R_2 Q_2 + {}_2R\,Q_3^2 &= -2\,{}_2R\,Q_2 Q_3 + P\,,\\
R_1 Q_1^2 - R_2 Q_2^2 + R_3 Q_3^2 &= 0\,,
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

worin ${}_1R_1 = R_1 + {}_1R$ der (1) entsprechende R-Wert für die ganze erste Teilleitung $E\,1\,A$ und ${}_2R_2 = R_2 + {}_2R$ jener für die ganze zweite Teilleitung $E\,2\,A$ bedeutet. Schließlich erhält man aus (4) das Gleichungssystem

$$Q_1^2 = a_1 Q_1 Q_3 + b_1 Q_2 Q_3 + c_1 P\,, \tag{5a}$$

$$Q_2^2 = a_2 Q_1 Q_3 + b_2 Q_2 Q_3 + c_2 P\,, \tag{5b}$$

$$Q_3^2 = a_3 Q_1 Q_3 + b_3 Q_2 Q_3 + c_3 P\,, \tag{5c}$$

wenn die Bezeichnungen

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{2\,({}_{12}R_{23} + {}_{12}R_2)}{N}, & b_1 &= \frac{2\,{}_{21}R_2}{N}, \\ a_2 &= \frac{2\,{}_{12}R_1}{N}, & b_2 &= \frac{-2\,({}_{21}R_{13}' - {}_{21}R_1)}{N}, \\ a_3 &= \frac{-2\,{}_{12}R_{21}}{N}, & b_3 &= \frac{-2\,{}_{21}R_{12}}{N}, \\ c_i &= \frac{1}{2}\left(\frac{a_i}{{}_1R} - \frac{b_i}{{}_2R}\right) & & (i = 1, 2, 3) \end{aligned}\right\}$$

und

$$N = \begin{vmatrix} {}_1R_1 & 0 & {}_1R \\ 0 & {}_2R_2 & {}_2R \\ R_1 & -R_2 & R_3 \end{vmatrix}$$

eingeführt werden, $N \neq 0$ ist und die Symbole

$$\left.\begin{aligned} {}_{ik}R_{lm} &= {}_iR\ ({}_kR + R_1)\ R_m, \\ {}_{ik}R_{lm} &= {}_iR\ {}_kR\ R_l\ R_m \end{aligned}\right\} \quad (i, k, l, m = 1, 2, 3)$$

benützt werden. Die Gleichungen des Systems (4) sind aber für $N = 0$ nur dann gleichzeitig für nicht negative Werte von Q_1, Q_2, ${}_1R$ und ${}_2R$ möglich, wenn $Q_1 = Q_2 = Q_3 = P = 0$ ist, d. h. wenn das Leitungssystem nicht durchströmt wird.

3. Graphische Lösung. Zur Lösung des Gleichungssystems (5) sollen nomographische Hilfsmittel verwendet werden. Die Gleichung (5a) ergibt ein Fluchtliniennomogramm mit drei Leitern, die in rechtwinkligen Koordinaten durch folgende Parameterdarstellungen bestimmt sind:

$$\begin{aligned} Q_1\text{-Leiter:}\ & x = -\frac{b_1}{a_1 Q_1}, & y &= \frac{Q_1^2 - c_1 P}{a_1 Q_1}, \\ Q_2\text{-Leiter:}\ & x = \frac{1}{Q_2}, & y &= 0, \\ Q_3\text{-Leiter:}\ & x = 0, & y &= Q_3. \end{aligned}$$

Die Q_1-Leiter ist eine Hyperbel mit den Asymptoten $x = 0$ (y-Achse) und $y = (c_1 P/b_1)\, x$, deren Mittelpunkt der Koordinatenursprung ist. Ebenso folgt für (5 b) ein Fluchtliniennomogramm mit drei Leitern:

$$\begin{aligned} Q_1\text{-Leiter:}\ & x = \frac{1}{Q_1}, & y &= 0, \\ Q_2\text{-Leiter:}\ & x = \frac{-a_2}{b_2 Q_2}, & y &= \frac{Q_2^2 - c_2 P}{b_2 Q_2}, \\ Q_3\text{-Leiter:}\ & x = 0, & y &= Q_3. \end{aligned}$$

Hier ist die Q_2-Leiter eine Hyperbel mit den Asymptoten $x = 0$ (y-Achse) und $y = (c_2 P/a_2)\, x$, deren Mittelpunkt der Koordinatenursprung ist.

Endlich erhält man für (5 c) ein Fluchtliniennomogramm mit drei Leitern:

$$\begin{aligned} Q_1\text{-Leiter:}\ & x = \frac{b_3}{a_3 Q_1}, & y &= \frac{1}{Q_1}, \\ Q_2\text{-Leiter:}\ & x = \frac{-1}{Q_2}, & y &= 0, \\ Q_3\text{-Leiter:}\ & x = 0, & y &= \frac{a_3 Q_3}{Q_3^2 - c_3 P}. \end{aligned}$$

Diese drei Leiter sind Gerade durch den Koordinatenursprung, von denen zwei mit den Koordinatenachsen zusammenfallen.

Es empfiehlt sich, wie in Abb. 4 alle drei Fluchtliniennomogramme zu vereinigen, weil sie eine Leiter gemeinsam haben.

Nun kann das Gleichungssystem (5) graphisch gelöst werden. Wird für Q_3 ein beliebiger fester Wert Q_3^i gewählt, so liefern die zu den Gleichungen (5 a) und (5 c) gehörigen Teile des

Nomogramms Abb. 4 für jeden gewählten Wert $Q_2 = Q_2^k$ zwei im allgemeinen verschiedene Werte $Q_1^{k'}$ bzw. $Q_1^{k''}$ für Q_1. Wird für Q_2 eine Reihe verschiedener Werte Q_2^k gewählt, so kann man die in Abb. 5 angedeuteten Kurven $[Q_1^{k'}]$ bzw. $[Q_1^{k''}]$, nämlich eine Kurve zweiter Ordnung und eine Gerade, zeichnen. Zu ihrem Schnittpunkt P, für den $Q_1^{k'} = Q_1^{k''} = Q_1^i$ ist, gehört mit $Q_3 = Q_3^i$ der Punkt P'. Wird dieser Vorgang für eine Reihe von Werten $Q_3 = Q_3^i$ durchgeführt,

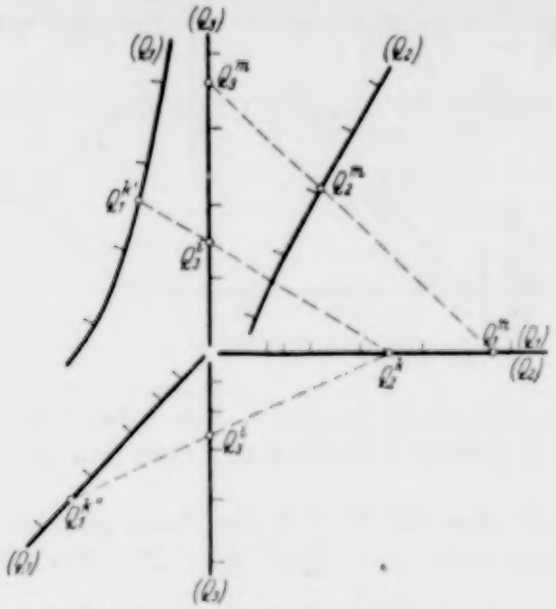


Abb. 4. Nomogramm für das passive System.

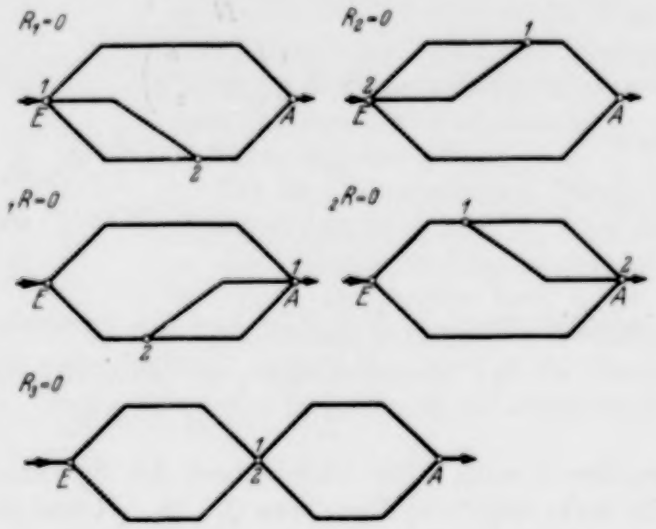


Abb. 6. Sonderfälle: einer der R-Werte gleich Null.

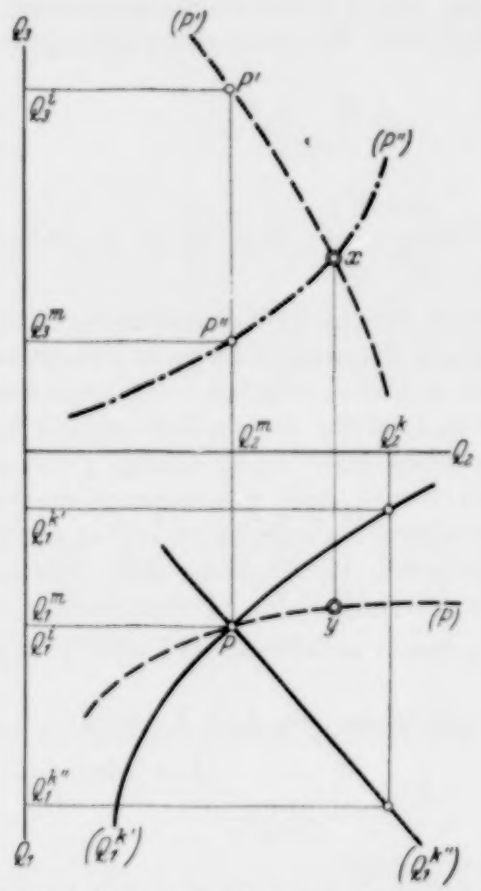


Abb. 5. Teilförderströme für das passive System.

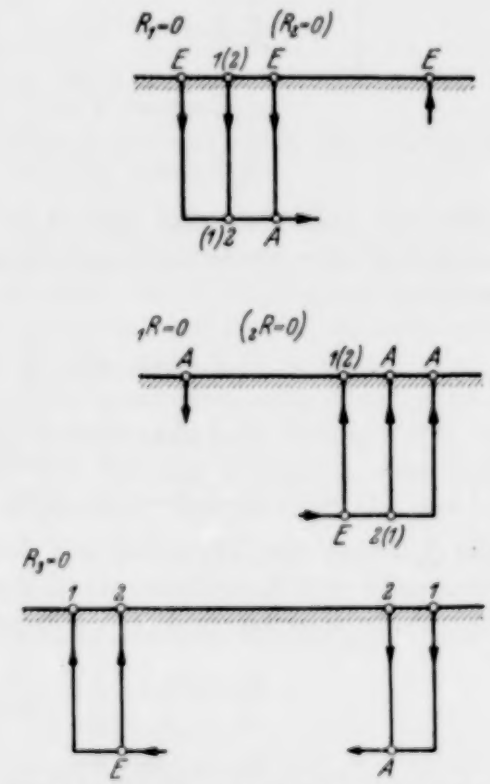


Abb. 7. Sonderfälle: einer der R-Werte gleich Null.

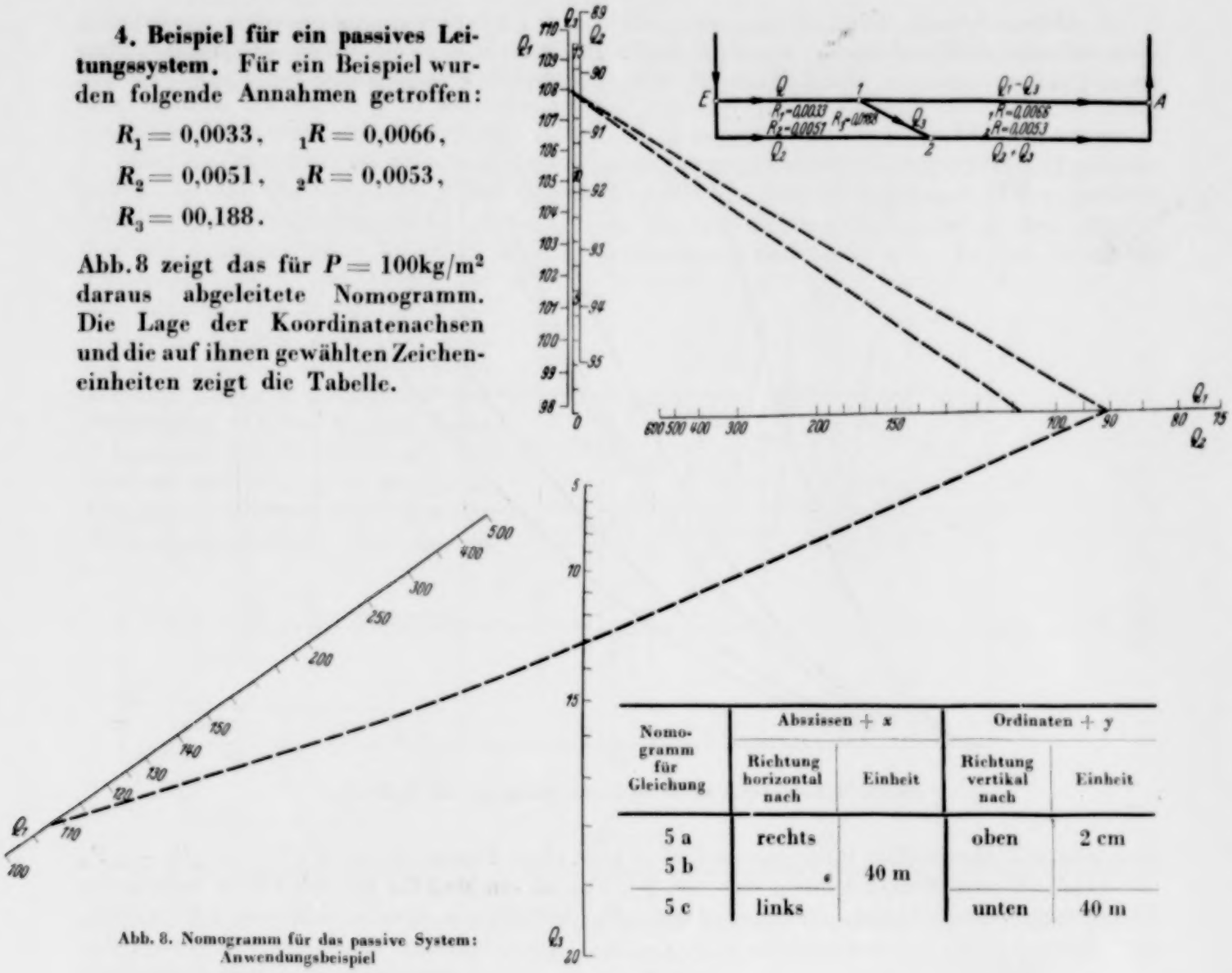
so erhält man die in Abb. 5 angedeuteten Kurven $[P]$ bzw. $[P']$. Die zu den Punkten der Kurve $[P]$ gehörigen Wertepaare Q_1^m, Q_2^m liefern in dem zu (5 b) gehörigen Teil des Nomogramms Abb. 4 jeweils einen Wert Q_3^m für Q_3, der im allgemeinen nicht gleich Q_3^i ist. Der zugehörige Punkt P'' ist in Abb. 5 angedeutet. Die Punkte P'' liegen auf einer Kurve $[P'']$, deren Schnittpunkte x mit der Kurve $[P']$ als Koordinaten Lösungen des Gleichungssystems (5) haben, unter denen sich die für die gestellte Aufgabe geeigneten befinden. Für ein solches Lösungssystem ist $R = P/Q^2$ der R-Wert des betrachteten Systems.

Die Abb. 6 und 7 stellen Sonderfälle des betrachteten Systems dar, in denen die R-Werte einzelner Teilleitungen Null werden.

4. Beispiel für ein passives Leitungssystem. Für ein Beispiel wurden folgende Annahmen getroffen:

$$R_1 = 0{,}0033, \quad {}_1R = 0{,}0066,$$
$$R_2 = 0{,}0051, \quad {}_2R = 0{,}0053,$$
$$R_3 = 00{,}188.$$

Abb. 8 zeigt das für $P = 100\,\mathrm{kg/m^2}$ daraus abgeleitete Nomogramm. Die Lage der Koordinatenachsen und die auf ihnen gewählten Zeicheneinheiten zeigt die Tabelle.



Nomogramm für Gleichung	Abszissen + x		Ordinaten + y	
	Richtung horizontal nach	Einheit	Richtung vertikal nach	Einheit
5 a 5 b	rechts	40 m	oben	2 cm
5 c	links		unten	40 m

Abb. 8. Nomogramm für das passive System: Anwendungsbeispiel

Aus der in Abb. 9 dargestellten graphischen Lösung, die mit Hilfe des Nomogramms der Abb. 8 in der in Abschnitt 3 angegebenen Weise bestimmt wurde, folgt

$$Q_1 = 108\ \mathrm{m^3/s}, \qquad Q_2 = 90{,}5\ \mathrm{m^3/s},$$
$$Q_3 = 13{,}1\ \mathrm{m^3/s}$$

und daher der gesamte Förderstrom des betrachteten Systems

$$Q = Q_1 + Q_2 = 198{,}5\ \mathrm{m^3/s},$$

für welchen sich zu $P = 100\ \mathrm{kg/m^2}$ der R-Wert des passiven Systems $R = 0{,}00254$ ergibt. Weil Q_3 positiv ist, strömt das strömende Mittel in der Querverbindung vom Punkt 1 zum Punkt 2. In Abb. 10 wurden für das ganze passive System und für seine fünf Teilleitungen die Wider-

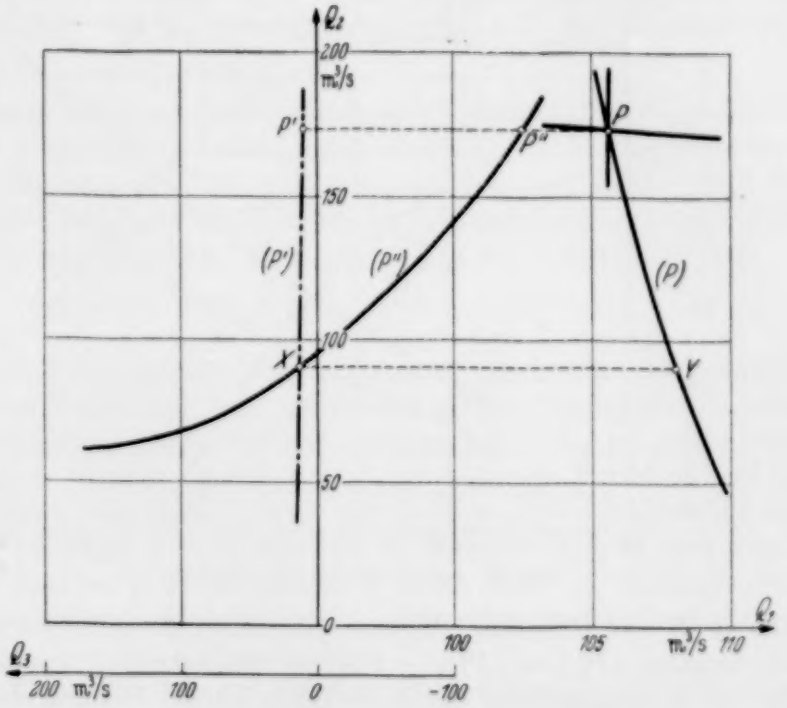


Abb. 9. Teilförderströme für das passive System: Anwendungsbeispiel.

standsparabeln und auf ihnen die zu den ermittelten Lösungen gehörenden Betriebspunkte dargestellt.

5. Aktives System. Ein Leitungssystem soll aktives System genannt werden, wenn in ihm dem strömenden Mittel Energie zugeführt wird. Das kann z. B. so geschehen, daß in ihm Lüfter bzw. Pumpen arbeiten. Bezeichnet ${}_LP_A$ den Gesamtdruck unmittelbar vor und ${}_LP_E$ den

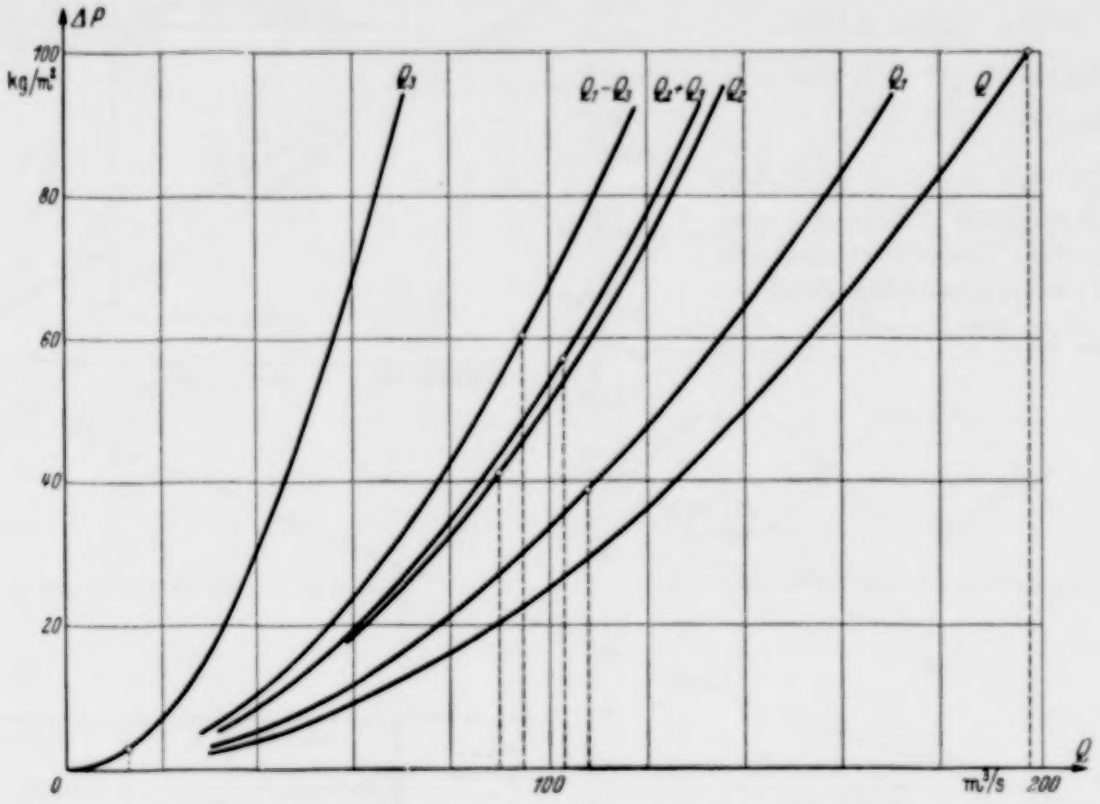


Abb. 10. Widerstandsparabeln für das passive System und seine Teilleitungen.

Gesamtdruck unmittelbar hinter einem Lüfter bzw. einer Pumpe, so stellt ${}_LP_{EA} = {}_LP_E - {}_LP_A$ die erzielte Gesamtdruckerhöhung dar und $Q \cdot {}_LP_{EA}$ ist ein Maß für die dabei dem strömenden Mittel zugeführte Leistung. Zwischen Q und ${}_LP_{EA}$ besteht ein dem betreffenden Lüfter (bzw. der Pumpe) eigentümlicher Zusammenhang, dessen Darstellung in einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit Q als Abszissen und ${}_LP_{EA}$ als Ordinaten die Kennlinie des Lüfters bzw. der Pumpe heißt. Die Kurve K in Abb. 11 ist eine solche Kennlinie für einen Axiallüfter Bauart Schicht ($D = 3{,}40$ m, $n = 440$ U/min, $\gamma = 1{,}25$ kg/m³). Arbeitet dieser Lüfter in einer einfachen Leitung, deren R-Wert gegeben ist, und in der dem strömenden Mittel außer durch diesen Lüfter keine Energie zugeführt wird, so erhält man für diese, nachdem man sich den Lüfter aus der Leitung entfernt gedacht hat, $P_{AE} = RQ^2$, wofür man die Kurve W ins Koordinatensystem der Lüfterkennlinie in Abb. 11 einzeichnet. Wird zu jedem Q als Abszisse ${}_SP_{EA} = {}_LP_{EA} - P_{AE}$ als Ordinate eingezeichnet, so erhält man die Kurve S. Ihre Punkte bestimmen für das betreffende aktive System, das aus der betrachteten einfachen Leitung und dem in ihr arbeitenden Lüfter besteht, zu jedem Q die zugehörige Gesamtdruckdifferenz

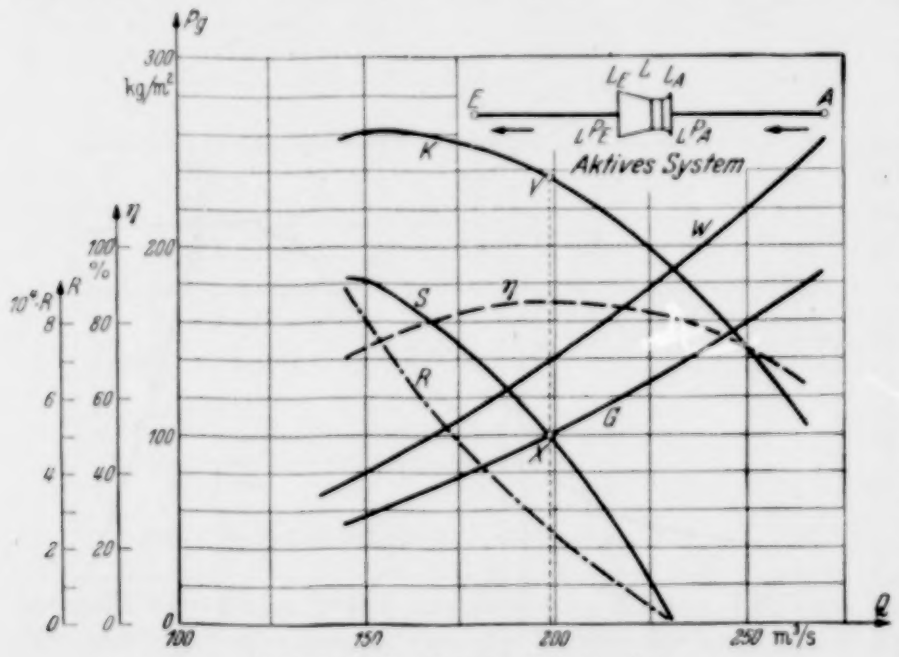


Abb. 11. Aktives System: Lüfterkennlinie.

${}_sP_{EA} = f_S(Q)$ als Funktion von Q. Die Beziehung

$$R = \frac{{}_sP_{EA}}{Q^2}$$

ordnet jedem Wertepaar Q, ${}_sP_{EA}$ eindeutig einen R-Wert zu. Zu jedem Punkt der Kurve S gehört daher ein ganz bestimmter R-Wert. In Abb. 11 ist die Kurve R eingezeichnet, die aus den Punkten der Kurve S so abgeleitet wurde. Ein aktives System unterscheidet sich daher von einem passiven dadurch, daß sein R-Wert nicht konstant ist, sondern vom Q abhängt.

Wird ein solches aktives System mit einem passiven System vereinigt, wie das in Abb. 12 gezeichnet ist, so daß der Endpunkt ${}_aE$ des aktiven Systems mit dem Anfangspunkt ${}_pA$ des passiven Systems und der Anfangspunkt ${}_aA$ des aktiven Systems mit dem Endpunkt ${}_pE$ des passiven Systems zusammenfallen, so erhält man ein geschlossenes aktives System. In Abb. 11 ist zur Lüfterkennlinie K und zu den für den aktiven Teil des Systems bestimmten Kurven S und R noch die zum passiven Teil des Systems gehörige Kurve G gezeichnet. Der Schnittpunkt X der Kurven S und G bestimmt den Förderstrom Q des Systems und ${}_pP_{AE-X} = {}_aP_{EA-X}$ die Gesamtdruckdifferenz zwischen den Vereinigungspunkten des aktiven

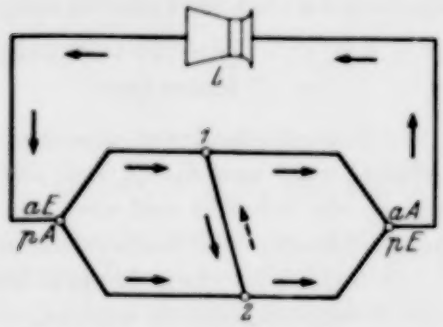


Abb. 12. Geschlossenes aktives System.

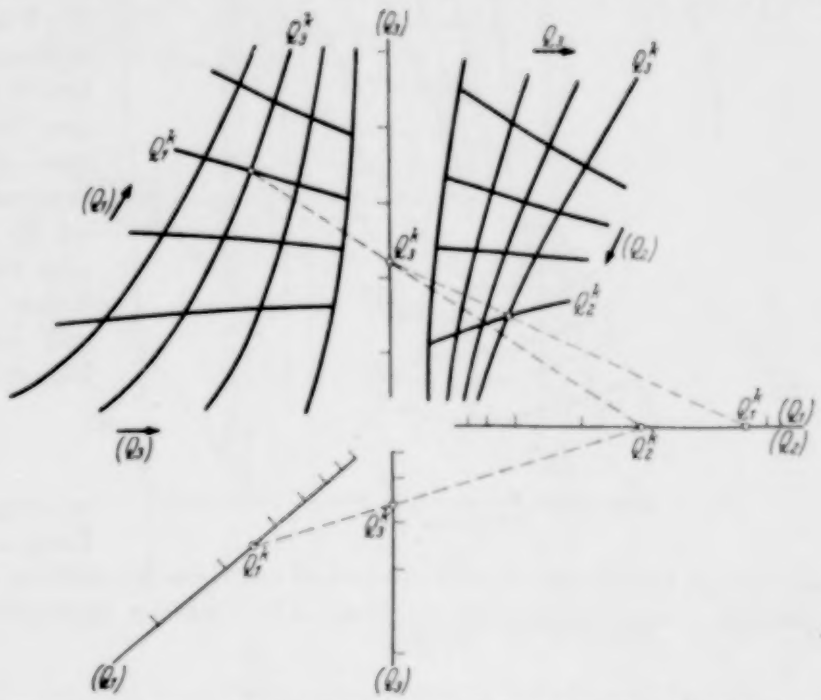


Abb. 13. Nomogramm für das aktive System: Lüfter in der Querverbindung 1—2.

und des passiven Systems. Zum Punkt X gehört für dasselbe Q auf der Kurve K der Arbeitspunkt Y des Lüfters, der die vom Lüfter erzeugte Gesamtdruckdifferenz ${}_LP_{EA}$ festlegt. Der Abb. 11 liegt als passives System jenes zugrunde, das in Abschnitt 4 behandelt wurde. Für die zum aktiven System gehörende Kurve W wurde $R = 0{,}0035$ gewählt und der dort arbeitende Lüfter war so ausgelegt worden, daß zu seinem Arbeitspunkt Y der Bestwert des Lüfterwirkungsgrades $\eta = 85\%$ gehört.

6. Zwei parallel geschaltete Leitungen mit einer Querverbindung als aktives System. Arbeitet in einer der Teilleitungen des in Abb. 3 dargestellten Leitungssystems ein Lüfter bzw. eine Pumpe, so liegt ein aktives System vor. Es soll zuerst der Fall besprochen werden, daß in der Querverbindung 1—2 ein Lüfter arbeitet und alle anderen Teilleitungen des Leitungssystems passiv sind. P für das Leitungssystem sei konstant und gegeben. Je nach der Art des Lüfters ist jetzt

$$P_{E1} \gtrless 0\,, \qquad P_{1A} \gtrless 0\,, \qquad P_{E2} \gtrless 0\,, \qquad P_{2A} \gtrless 0\,,$$

und der Sinn des Durchflusses in den Teilleitungen ist daher nicht mehr von vornherein bekannt. Wenn nun für Q_1 und Q_2 auch negative Werte und Null zugelassen werden, wobei jeweils positiven Werten der in Abschnitt 2 angegebene Durchflußsinn entsprechen soll, so gelten alle Gleichungen des Systems (2), nur ist hier R_3 nicht mehr konstant, sondern eine Funktion von Q_3, die wie in Abb. 8 aus der Lüfterkennlinie und dem R-Wert der Teilleitung 1—2 ableitbar ist. Die Determinante N ist eine lineare Funktion von R_3 und die a_i, b_i, c_i ($i = 1, 2, 3$) sind linear gebrochene Funktionen von R_3. In dem zu (5 a) entwickelten ersten Teil des Nomogramms (Abb. 4) erhält man anstatt der Q_1-Leiter, und in seinem zu (5 b) gehörenden zweiten Teil anstatt der Q_2-Leiter nun nicht mehr Kurven, sondern Kurvenscharen.

Im ersten Nomogrammteil (Abb. 13) ergibt jedes Q_3 zu dem ihm entsprechenden R_3-Wert eine mit den Werten von Q_3 zu beziffernde Hyperbel. Für alle Hyperbeln dieser Schar ist der

Koordinatenursprung Mittelpunkt und die Y-Achse eine Asymptote. Werden alle zu gleichen Q_1-Werten gehörenden Punkte verbunden, so erhält man eine zweite mit Q_1 zu beziffernde Kurvenschar. Analog findet man für den zweiten Nomogrammteil ein Kurvenfeld, bestehend aus einer mit Q_2 bezifferten Kurvenschar und aus einer mit Q_3 bezifferten Hyperbelschar. Der dritte Nomogrammteil unterscheidet sich von dem der Abb. 4 nur durch die andere Teilung der Q_3-Leiter. Die Benutzung des so entwickelten Nomogramms geschieht ganz ähnlich, wie das in Abschnitt 3 für ein passives System beschrieben wurde.

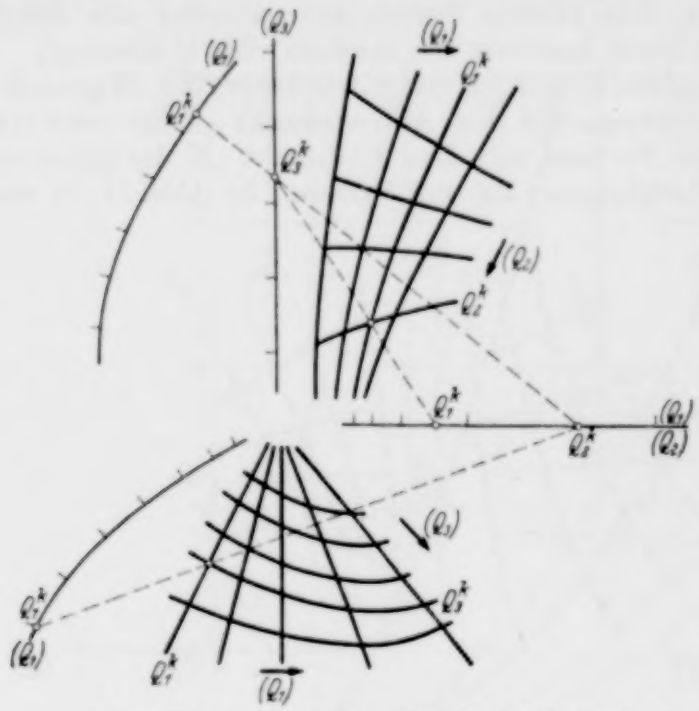


Abb. 14. Nomogramm für das aktive System: Lüfter in der Teilleitung $E1$.

Wenn der Lüfter in der Teilleitung $E1$ arbeitet, sind N und die a_i, b_i, c_i $(i = 1, 2, 3)$ Funktionen des nunmehr von Q_1 abhängigen R_1-Wertes. Im ersten Nomogrammteil erhält man anstatt der mit Q_1 bezifferten ursprünglichen Hyperbel eine andere Kurve. Im zweiten Nomogrammteil ergibt sich ein mit Q_1 bzw. Q_2 beziffertes der Abb. 14 ähnelndes Kurvenfeld, und im dritten Nomogrammteil ist die Q_1-Leiter eine Kurve und nicht mehr eine Gerade, während die Q_3-Leiter zu einer Schar von je zu einem Q_1-Wert gehörenden auf der Y-Achse liegenden Leitern wird. Dieser Nachteil wird durch die Transformation

$$\xi = x + \alpha Q_1 y, \qquad (\alpha \neq 0, \text{ willkürliche Konstante})$$
$$\eta = y$$

beseitigt, wodurch die Q_1-Leiter in eine andere Form übergeführt wird und die Q_3-Leitern in ein mit Q_1 beziffertes Geradenbüschel mit dem Koordinatenursprung als Scheitel und eine mit Q_3 bezifferte Kurvenschar übergehen. Alle anderen Aufstellungsmöglichkeiten des Lüfters können auf die eben besprochene zurückgeführt werden.

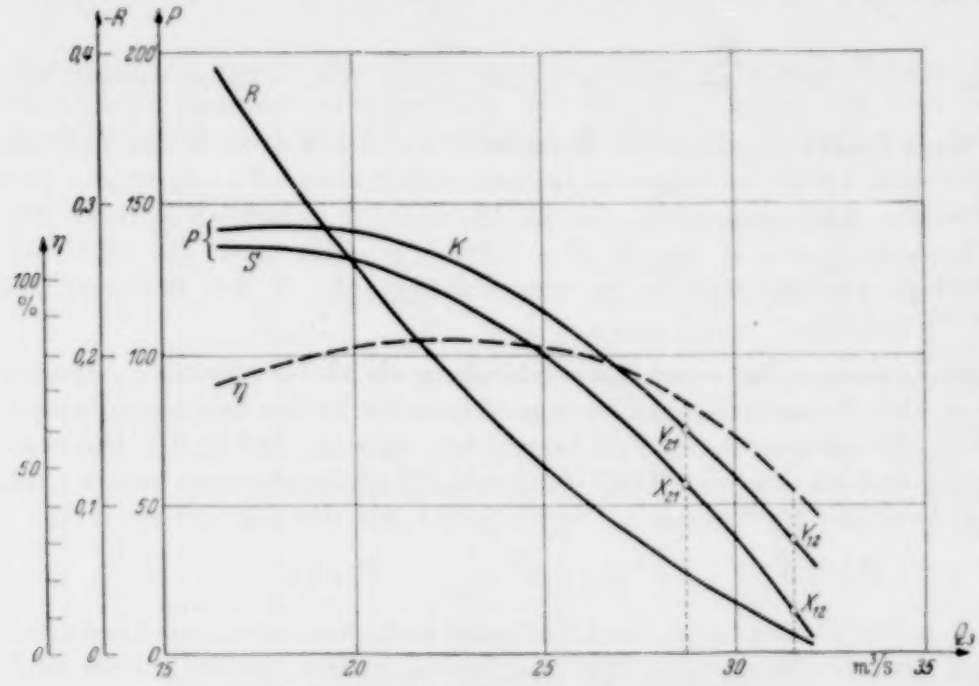


Abb. 15. Kennlinie des Lüfters in der Querverbindung.

7. Beispiel für ein aktives Leitungssystem. In der Teilleitung 1 — 2 soll ein Lüfter L' arbeiten, dessen Kennlinie die Kurve K in Abb. 15 ist. L' ist ein Axiallüfter Bauart Schicht mit einem Laufradaußendurchmesser von 1400 mm und einer Drehzahl von 720 U/min. Unter Berücksichtigung der in Abschnitt 5 für diese Teilleitung angegebenen Konstanten R_3 erhält man daraus die Kurve S, für deren Punkte die jeweiligen R-Werte berechnet und in Kurve R in Abhängigkeit vom Förderstrom aufgetragen wurden. Wenn der Lüfter L' in der Richtung vom Punkt 1 nach Punkt 2 fördert, so sind diese R-Werte im dargestellten Bereich des Förderstroms negativ bezogen auf P_{12}. Dem Nomogramm in Abb. 16 liegen dieselben Annahmen über die Koordinatenachsen und die Maßstabeinheiten zugrunde wie jenem in Abb. 8. Für $P = 100$ kg/m² ergab die graphische Lösung

$$Q_1 = 120 \text{ m}^3/\text{s}, \qquad Q_2 = 80 \text{ m}^3/\text{s}, \qquad Q_3 = 31{,}5 \text{ m}^3/\text{s}$$

und daher als Förderstrom für das gesamte betrachtete System

$$Q = Q_1 + Q_2 = 200 \text{ m}^3/\text{s},$$

al so einen vom Beispiel in Abschnitt 4 wenig verschiedenen Wert. Wird daher das betrachtete System, wie das in Abb. 17 dargestellt ist, wieder mit demselben aktiven System wie in Abschnitt 4 zu einem Kreislauf vereinigt, so erhält man für dessen Lüfter L denselben Arbeitspunkt. Für den Lüfter L' findet man den in Abb. 15 angegebenen Arbeitspunkt Y_{12}. Dadurch, daß diesmal in der Teilleitung 12 der Lüfter L' arbeitete, wurde für den gesamten Kreislauf nichts geändert, in den fünf Teilleitungen des betrachteten Systems wurde jedoch eine andere Verteilung der Förderströme und der Gesamtdruckdifferenzen als im Abschnitt 4 erzielt.

Nimmt man jedoch an, daß derselbe Hilfslüfter L so in die Querverbindung eingebaut wurde, daß er im umgekehrten Sinn, also von 2 nach 1 bläst, während der R-Wert der passiven Querverbindung 1—2, also ohne eingebauten Lüfter, für beide Durchströmrichtungen gleich vorausgesetzt werden soll, so muß man die R-Werte in Abb. 15 mit -1 multiplizieren; sie sind dann positiv. Das der Abb. 16 für diesen Fall entsprechende Nomogramm ergibt zu

$$P = 100 \text{ kg/m}^2$$

die Lösung

$$Q_1 = 80 \text{ m}^3/\text{s},$$
$$Q_2 = 111{,}5 \text{ m}^3/\text{s},$$
$$Q_3 = 28{,}75 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Der Gesamtförderstrom

$$Q = Q_1 + Q_2 = 191{,}5 \text{ m}^3/\text{s}$$

unterscheidet sich dann von dem in den früheren Beispielen erhaltenen. Damit verschiebt sich aber der Arbeitspunkt Y in Abb. 11. Das angegebene graphische Verfahren muß für verschiedene Werte von P wiederholt werden, wobei sich im Nomogramm Abb. 16 in beiden Kurvenfeldern jeweils die Ordinaten der Netzpunkte ändern, während die Abszissen unverändert bleiben.

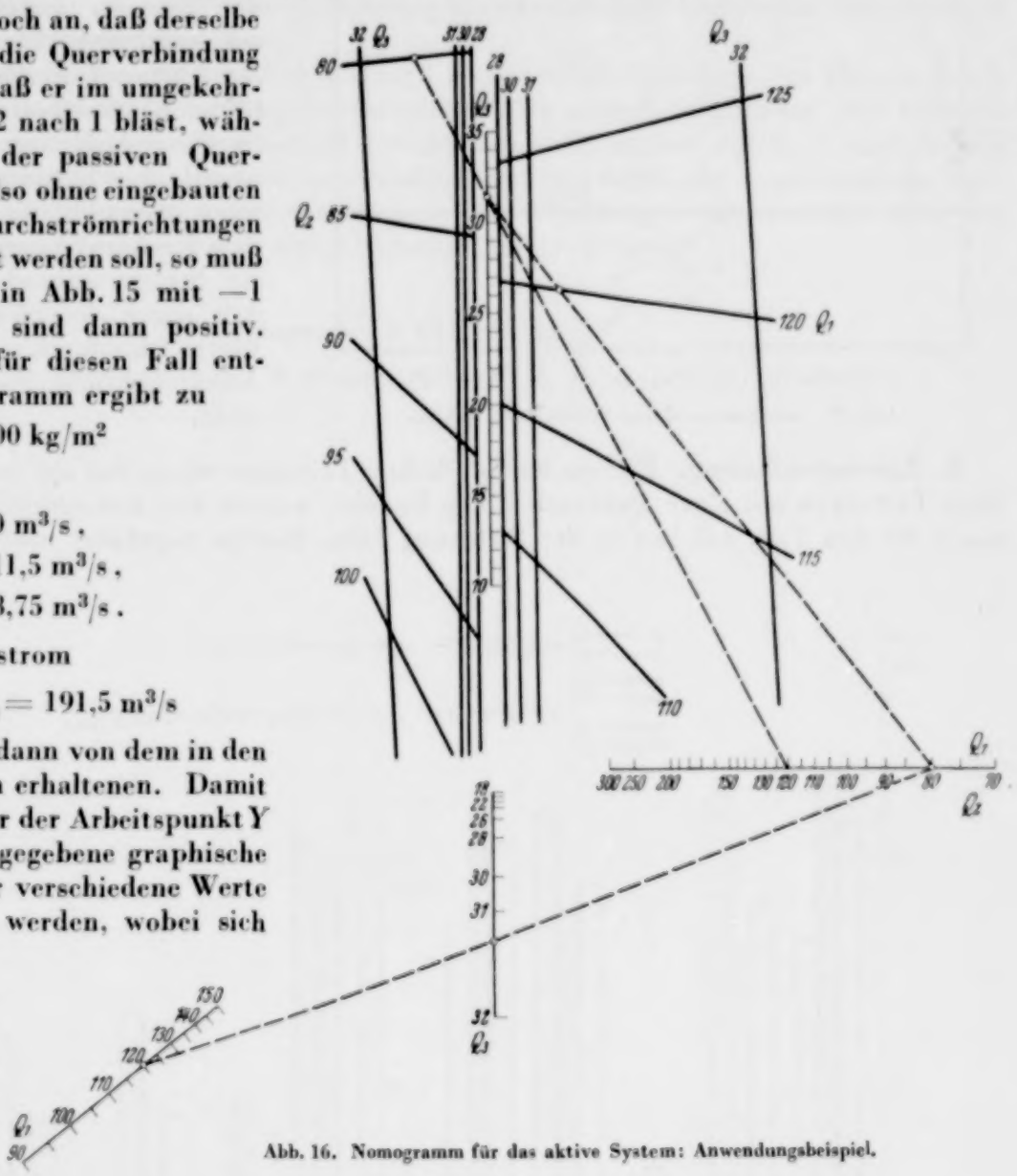


Abb. 16. Nomogramm für das aktive System: Anwendungsbeispiel.

Von den Einzelleitern ändert sich nur die Q_3-Leiter des dritten Nomogrammteiles. Die so ermittelten Wertepaare P, Q können als Kennlinie des betrachteten aktiven Systems in Abb. 11 eingezeichnet werden, und es kann so der neue Arbeitspunkt des Lüfters L bestimmt werden. Im vorliegenden Beispiel erhält man als Lösung

$$Q_1 = 82{,}5 \text{ m}^3/\text{s}, \qquad Q_2 = 114{,}\text{m}^3/\text{s}, \qquad Q_3 = -28{,}7 \text{ m}_3/\text{s},$$

und zwar für die zum Gesamtförderstrom

$$Q = Q_1 + Q_2 = 196{,}5 \text{ m}^3/\text{s}$$

gehörige Gesamtdruckdifferenz $P = 105 \text{ kg/m}^2$.

Für den Hilfslüfter L' wurde der diesen Werten entsprechende Arbeitspunkt Y_{21} in Abb. 15 eingezeichnet.

In Abb. 18 sind die Förderströme in den Teilleitungen und die ihnen entsprechenden Gesamtdruckdifferenzen für die drei angegebenen Beispiele miteinander verglichen. Man erkennt, daß bei diesen Beispielen der Hilfslüfter L' im wesentlichen die Verteilung der Förderströme auf

die einzelnen Teilleitungen beeinflußt, gerade das ist aber oft bei den praktischen Anwendungen die Aufgabe eines solchen zusätzlichen Lüfters L'.

Es muß stets beachtet werden, ob der Lüfter L' irgendwo im System innere Kreisläufe verursacht, oder ob durch seinen Einsatz in einzelnen Teilleitungen überhaupt keine Strömung mehr stattfindet. In den meisten Anwendungsfällen sind innere Kreisläufe und Stockungen der Strömung in Teilen des Systems unerwünscht, oft sogar sehr gefährlich. Wenn der Arbeitspunkt des Lüfters L durch Einsatz des Hilfslüfters L' stark beeinflußt wird, so ist es im Extremfall sogar möglich, daß der neue Lüfter L' den ursprünglichen Lüfter L überspült, so daß dieser, anstatt dem Kreislauf Energie zuzuführen, nur ein Strömungshindernis darstellt, oder daß sogar die Strömung durch den Lüfter L hindurch seiner ursprünglichen Arbeitsrichtung entgegengesetzt verläuft.

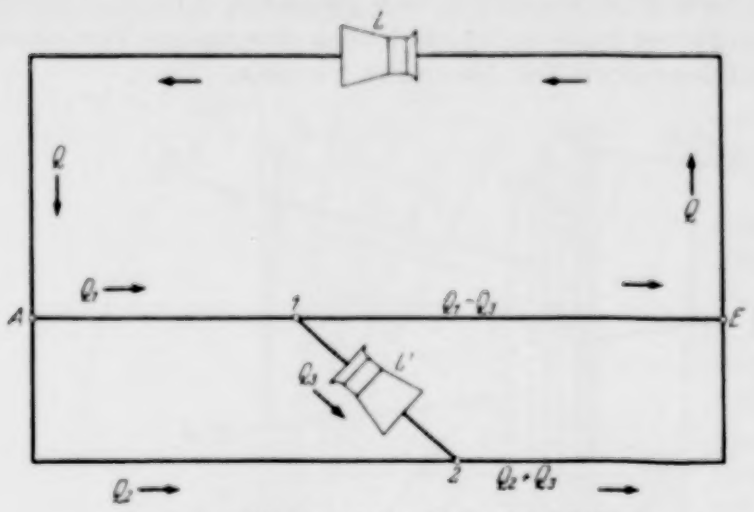


Abb. 17. Geschlossenes aktives System mit 2 Lüftern.

8. Zusammenfassung. Für ein überall dichtes Leitungssystem, das aus zwei parallel geschalteten Leitungen mit einer Querverbindung besteht, wurden mit nomographischen Hilfsmitteln zuerst für den Fall, daß in ihm der Strömung keine Energie zugeführt wird, und dann für den Fall, daß in einer seiner Teilleitungen ein Lüfter bzw. eine Pumpe mit bekannter Kennlinie arbeitet, die Verteilung der Förderströme und die zugehörigen Gesamtdruckdifferenzen zwischen je zwei Verzweigungspunkten bestimmt. Es wurden Sonderfälle besprochen und Beispiele für das Verfahren durchgeführt. Die Verwendung nomographischer Hilfsmittel liegt nahe, weil die Lüfter- bzw. Pumpenkennlinie nicht in analytischer Form festgelegt werden kann und die Gleichungen des Systems (5) quadratisch und nicht homogen sind.

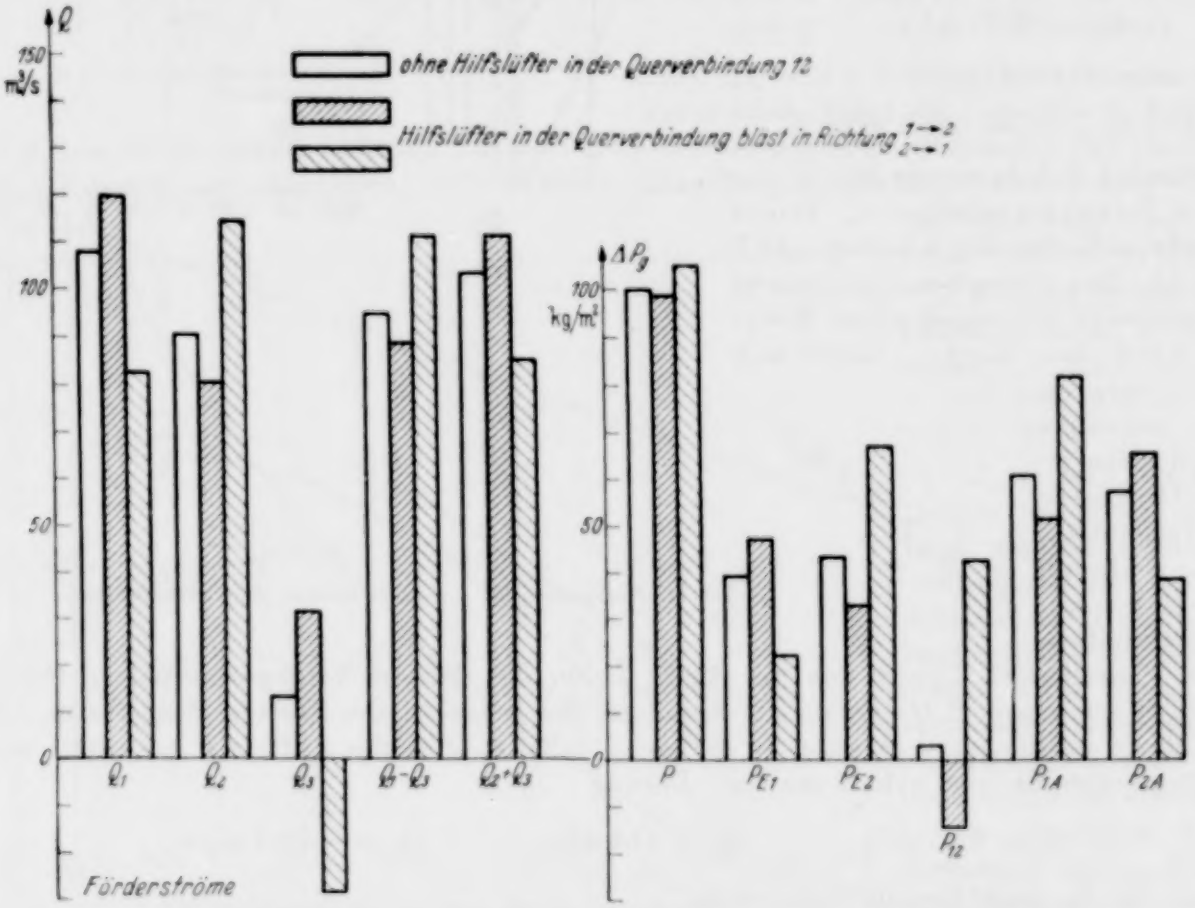


Abb. 18. Vergleich der Förderströme und der Druckdifferenzen für die besprochenen Beispiele.

Es soll darauf besonders hingewiesen werden, daß jedoch keinesfalls durch eine solche Lösungsmöglichkeit Erfahrungen auf den Gebieten, in die das betreffende Leitungssystem gehört, und die Erfahrungen des Lüfter- bzw. Pumpenbaues entbehrlich werden. Im Gegenteil kann nur aus diesen Quellen eine vernünftige Wahl der erforderlichen Konstanten und der einzusetzenden Lüfter bzw. Pumpen stammen. Die praktische Anwendbarkeit ist zudem so schwierig und eine Fehllösung verursacht stets, vor allem auf dem Gebiete der Grubenbewetterung, Betriebszustände, die nur der völlig mit dem betreffenden Sondergebiet Vertraute überblicken und verantworten kann, so daß die evtl. praktische Anwendung des entwickelten Verfahrens ausschließlich für diese Fachleute bestimmt sein kann.

Eine Analogie mit Fragen auf dem Gebiete der Elektrotechnik liegt nahe, wo übrigens auch eine experimentelle Behandlung der Aufgabe verhältnismäßig einfach möglich ist. Das ist auch bekannt und ein Vergleich der experimentell gewonnenen Erkenntnisse mit dem entwickelten Verfahren wäre wünschenswert. Im Falle eines aktiven Systems dürfte die experimentelle Darstellung des elektrischen Analogons für den in einer der Teilleitungen arbeitenden Lüfter mit als bekannt vorausgesetzter Kennlinie einige Schwierigkeiten bereiten.

(Eingegangen am 9. Oktober 1950.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *W. Richter*, Frankenthal, Beindersheimer Straße 13.

Berichtigung

zu meinem Aufsatz in Band XVIII, S. 394 des Ingenieur-Archivs „Beiträge zur Theorie der durch gleichförmigen Schub beanspruchten Platte. II. Mitteilung".

Von **W. Kucharski.**

In der genannten Arbeit habe ich unter (24) auf S. 397 irrtümlicherweise angegeben, daß die Bewegung stabil, und zwar periodisch verläuft, wenn die aus der Fundamentalgleichung (23) der maßgebenden linearen Substitutionen folgende Konstante $s = \pm 1$ ausfällt. Dies trifft nur dann zu, wenn s nicht gleichzeitig eine Doppelwurzel der Fundamentalgleichung ist. Im Falle der Doppelwurzel artet die Substitution in bekannter Weise aus, so daß dann zu der periodischen Lösung eine nichtperiodische hinzutritt, die mit der Zeit anwächst. Hier liegt gerade dieser Fall vor; in (24) ist die auf $s = \pm 1$ bezügliche Aussage im angegebenen Sinne zu korrigieren, und in dem Stabilitätskriterium (28) auf S. 398 ist das Gleichheitszeichen zu streichen. Die den später diskutierten und in Abb. 2 skizzierten Grenzkurven entsprechenden Bewegungen sind daher im allgemeinen nicht mehr stabil.

Wenn auch die Lösungen der hier behandelten partiellen Differentialgleichung naturgemäß keine *Matthieu*schen Funktionen sind, wie sie aus der gewöhnlichen Differentialgleichung (18) in bekannter Weise entstehen, sondern sich von diesen in vieler Beziehung grundsätzlich unterscheiden (man beachte z. B. die starken Abweichungen von Abb. 2 gegenüber der bekannten sog. *Strutt*schen „Karte"), so haben sie doch diejenigen Eigenschaften gemeinsam, die aus dem Auftreten der gleichartigen linearen Substitutionen folgen. Zu diesen gehören die Besonderheiten, welche im Falle einer Doppelwurzel für die Fundamentalgleichung auftreten.

(Eingegangen am 10. Mai 1951.)

Anschrift des Verfassers: Prof. *W. Kucharski*, Berlin-Charlottenburg, Hardenbergstraße 34.

Berechnung der Maschinenelemente. Von Dipl.-Ing. **M. ten Bosch** †, Professor an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich. Dritte, ergänzte Auflage der „Vorlesungen über Maschinenelemente". Mit 926 Textabbildungen. X, 534 Seiten. 1951. Ganzleinen DM 45.—

Inhaltsübersicht: Einleitung. — Formulierung der konstruktiven Aufgabe. — Die Grundnormen. — **I. Angewandte Festigkeitslehre.** Die Voraussetzungen der Festigkeitslehre und ihre praktische Bedeutung. Spannungen und Formänderungen in prismatischen Stäben. Zulässige Spannungen. Der ringsum symmetrisch belastete Drehkörper. Erweiterte Festigkeitslehre. — Formgebungselemente. Plastische Verformungen. Stabilitätsprobleme. — **II. Verbindungen.** Vernietungen. Keilverbindungen. Verschraubungen. Preßsitze. Schweißverbindungen. Federn. — **III. Wellen.** Gerade Wellen. Kupplungen. Kurbelwellen. Kritische Drehzahlen. — **IV. Gleitlager.** Gebräuchliche Lagerkonstruktionen. Berechnungsgrundlagen. Theorie der flüssigen Reibung. Endliche Breite der Gleitfläche. Misch- und Grenzreibung. Vergleich der Theorie mit der Erfahrung. Berechnung der Gleitlager. — **V. Wälzlager.** Lagerarten. Tragfähigkeit und Lebensdauer. Einbauregeln. Reibung und Schmierung. — **VI. Reibtriebe zur Übertragung der Drehbewegung.** Reibräder. Riementrieb. Seiltrieb. Reibkupplungen. Mechanische Bremsen. — **VII. Zahnräder.** Stirnräder für parallele Wellen. Räder für nicht parallele Wellen. Formgebung und Anordnung der Räder. Umlaufgetriebe. Schneckentrieb. Kettentrieb. — **VIII. Maschinengetriebe.** Einführung. Das gerade Schubkurbelgetriebe. Schubstangen und Kreuzköpfe. An- und Auslauf von Maschinen. Erwärmung bei aussetzendem Betrieb. Einrücken von Reibkupplungen. — **IX. Rohrleitungen.** Normen. Theoretische Grundlagen. Versuchswerte. Berechnung der Rohrleitungen. Berechnung der Flanschverbindungen. Dichtungen. Schrifttum.

Maschinenelemente. **Leitfaden zur Berechnung und Konstruktion für Maschinenbauschulen und für die Praxis mittlerer Techniker.** Von Dipl.-Ing. **W. Tochtermann,** Professor an der Staatl. Ing.-Schule Eßlingen. Sechste, völlig neubearbeitete Auflage. Mit 641 Abbildungen. XII, 515 Seiten. 1951. Ganzleinen DM 34.50

Inhaltsübersicht: **Begriff der Maschinenelemente.** Normung. Passungen. — **Die wichtigsten Werkstoffe. Allgemeine Konstruktionsrichtlinien.** — **I. Verbindungselemente.** Unlösbare Verbindungen. Lösbare Verbindungen. — **II. Maschinenelemente der drehenden Bewegung.** Zapfen. Achsen und Wellen. Kupplungen. Lager. — **III. Maschinenelemente zur Fortpflanzung von Drehbewegungen.** Zahnrädergetriebe. Kettengetriebe. Riemen- und Seiltrieb. Reibungsräder. — **IV. Maschinenelemente zur Umwandlung von Bewegungen.** Umwandlung von Schwingungsbewegungen in geradlinige Bewegung und umgekehrt. Umwandlung geradlinig hin- und hergehender Bewegung in Dreh- oder Schwingungsbewegung und umgekehrt. Die Teile des Kurbelmechanismus. — **V. Maschinenelemente zur Fortleitung von Flüssigkeiten, Gasen und Dämpfen.** Rohre und Rohrverbindungen. Absperrvorrichtungen. Stopfbüchsen. — **Anhang:** Quellen- und Sachverzeichnis.

Messung der Oberflächengüte. **Ihre praktische Anwendung auf die Funktion zusammenarbeitender Teile.** Von Dr.-Ing. **Georg Schlesinger** †, ehemals Professor an der Technischen Hochschule Berlin-Charlottenburg. Mit 154 Abbildungen und vielen Zahlentafeln. VIII, 248 Seiten. 1951. Ganzleinen DM 31.50

Inhaltsübersicht: Grundlagen und Begriffe. — Erzeugung und Gestaltung der Oberfläche. — Anforderungen an das Werkstück: Abmessungen. — Zweckmäßige Oberflächengüte. — Verwendungszweck. — Die Meßrichtung der Rauhigkeitsprüfung. — Die Meßeinheit. — Normung und Symbole. — Die gebräuchlichen Verfahren zur Messung der Oberflächen von Metallen und ihre Anwendbarkeit. — Benutzte Meßinstrumente. — Ergebnisse der Betriebsaufnahme. — Die Passungen und der Einfluß der Oberflächengüte der Lehren auf die Funktion zusammenarbeitender Teile. — Zeitgemäße Arbeitsverfahren für glatte, ebene und genaue Flächen. — Praktische Beispiele für die Anwendung der Oberflächenmessung. — Feststellung günstiger Arbeitsbedingungen bei Schlichtarbeiten durch Messung der erzeugten Oberflächengüte. — Quellennachweis. — Namen- und Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Neuere Festigkeitsprobleme des Ingenieurs. Ausgewählte Kapitel. Von Prof. Dr.-Ing. **W. Flügge,** Stanford (USA), Prof. Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel,** Stuttgart, Prof. Dr.-Ing. **K. Klotter,** Karlsruhe, Prof. Dr.-Ing. **K. Marguerre,** Darmstadt, Prof. Dr. **G. Mesmer,** Darmstadt. Herausgegeben von **K. Marguerre,** Professor der Mechanik an der Technischen Hochschule Darmstadt. Mit 120 Figuren. VIII, 253 Seiten. 1950.

Ganzleinen DM 25.50

Inhaltsübersicht: I. Experimentelle Verfahren zur Bestimmung mechanischer Spannungen. Von Professor Dr. **G. Mesmer,** Darmstadt. — II. Die Grundbegriffe der Elastizitätslehre. Von Professor Dr. **K. Marguerre,** Darmstadt. — III. Die Festigkeit von Schalen. Von Professor Dr. **W. Flügge,** Stanford (USA). — IV. Schwingungserscheinungen im Bau- und Maschinenwesen. Von Professor Dr. **K. Klotter,** Karlsruhe. — V. Verfahren zur Lösung technischer Eigenwertprobleme. Von Professor Dr. Dr. **R. Grammel,** Stuttgart. — VI. Knick- und Beulvorgänge. Von Prof. Dr. **K. Marguerre,** Darmstadt. — Sachverzeichnis.

Ernst Suter, Die Methode der Festpunkte. Vereinfachtes Verfahren zur Berechnung statisch unbestimmter Konstruktionen mit Beispielen aus der Praxis, insbesondere von Stahlbetontragwerken. Dritte, neubearbeitete Auflage von Dipl.-Ing. **Ernst Traub.** Mit 232 Abbildungen und 7 Tafeln. XII, 216 Seiten. 1951. Ganzleinen DM 21.—

Inhaltsübersicht: Einleitung. Allgemeines. Die Mohrschen Sätze. Graphische Bestimmung der Festpunkte für durchlaufende Träger. — Erster Abschnitt: **Tragwerke mit unverschieblichen Knotenpunkten und mit von Stab zu Stab veränderlichem, aber auf Stablänge konstantem Trägheitsmoment:** Das k-Verfahren zur Bestimmung der Festpunkte, Verteilungsmaße und Übergangszahlen. Das k-Verfahren zur Bestimmung der Kreuzlinienabschnitte und Momente infolge beliebiger Belastung des Tragwerkes. Rechnungsabschnitt I. Übersichtliche Zusammenstellung des Rechnungsvorganges. Bestimmung der Querkräfte, Normalkräfte und Auflagerkräfte. Bestimmung der Festhaltekräfte. — Zweiter Abschnitt: Rechnungsabschnitt II. **Tragwerke mit verschiebbaren Knotenpunkten und mit von Stab zu Stab veränderlichem, aber auf Stablänge konstantem Trägheitsmoment:** Biegungsmomente infolge gegenseitiger Verschiebung der beiden Endpunkte eines Stabes und die zugehörige Erzeugungskraft. Tragwerke mit senkrechten Stielen und waagerechten Balken. Tragwerke mit schiefen Stielen oder schrägen Balken. — Dritter Abschnitt: **Tragwerke mit auf Stablänge veränderlichem Trägheitsmoment:** Das k-Verfahren zur Bestimmung der Festpunkte und Kreuzlinienabschnitte. Das Drehwinkel-Verfahren zur Bestimmung der Festpunkte, Übergangszahlen und Kreuzlinienabschnitte. — Vierter Abschnitt: **Grenzwerte der Momente und Querkräfte:** Grenzwerte der Momente und Querkräfte für ständige Last und Nutzlast. Einflußlinien der Momente und Querkräfte für bewegliche Lasten. Momente infolge Temperaturänderung und Stützensenkung. — Fünfter Abschnitt: **Hilfstafeln zur Bestimmung der Festpunkte und Kreuzlinienabschnitte.** — Sechster Abschnitt: **Beispiele aus der Praxis.**

Bauten aus Beton- und Stahlbeton-Fertigteilen. Ein Lehrbuch. Von Dr.-Ing. **S. Kiehne** †. Nach dem Tode des Verfassers durchgesehen und ergänzt von Dr.-Ing. **P. Bonatz.** Mit 335 Abbildungen. XII, 357 Seiten. 1951. Ganzleinen DM 31.50

Inhaltsübersicht: **A. Einteilung, Vor- und Nachteile, Begriffsbestimmung der Bauten aus Beton- und Stahlbetonfertigteilen:** — Einteilung. — Vorzüge der Konstruktionen aus Stahlbetonfertigteilen. — Nachteile der Konstruktionen aus Stahlbetonfertigteilen. — Begriffsbestimmung der Bauten aus Beton- und Stahlbetonfertigteilen. — **B. Die Baustoffe der Beton- und Stahlbetonfertigteile:** Schwergewichtsbeton. — Schwerbeton (gewöhnlicher Beton). — Leichtbeton. — **C. Die Baukonstruktionen aus Stahlbetonfertigteilen:** Die Beton- und Stahlbetonfertigteile als Baueinheiten und ihre Verbindung: Tragende Teile. Raumumschließende Teile. Die Verbindung der Stahlbetonfertigteile. — Die Bauten aus Beton- und Stahlbetonfertigteilen: Eigentliche Betonfertigteil-Konstruktionen (I. Hauptgruppe). Wohngebäude. Industriebauten. Landwirtschaftliche Bauten. Verkehrs- und Versorgungsanlagen. Grund- und Wasserbau. Bergbau und Tunnelbau. Brückenbau. — Schalungslose Monolithbetonbauten (II. Hauptgruppe). Gleitschalungsbauten. — **D. Lage, Anordnung und Ausrüstung der Fabriken zur Herstellung von Beton- und Stahlbetonfertigteilen:** Vergleich zwischen ortsfesten und fliegenden Fabriken. — Bestimmung der Lage von neuen ortsfesten Fabriken. — Aufschließung des Geländes für die Fabrik. — Ausrüstung der Fabriken. — Schlußbemerkung zu den Bauten aus Beton- und Stahlbetonfertigteilen. — **Sachverzeichnis.**

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Springer-Verlag / Berlin · Göttingen · Heidelberg. Printed in Germany. L/V/12/7 0,8 K.B./Z.040.